2. cvičení z MAI (8. 10. 2014)

Příklady

1. Kde je chyba v rozdaném „důkazu“ matematickou indukcí (převzatém z Matoušek, Nešetřil, *Kapitoly z DM*), že každých n přímek v rovině, žádné dvě rovnoběžné, prochází jediným bodem?

2. Dokažte indukcí, že polynom stupně n s reálnými koeficienty má v $\mathbb{R}$ nanejvýš n kořenů, tj. že každá rovnice

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad (a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$$

   má nejvýše n řešení $x \in \mathbb{R}$.

3. Dokažte indukcí, že pro každé tři konečné množiny A, B, C platí rovnost ($|X|$ označuje počet prvků množiny X)

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\ .$$

4. Dokažte indukcí, že 6 dělí $10^n - 4$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

5. Je pravda, že když $f:\ M \to N$ i $g:\ N \to P$ je prosté, pak i složené zobrazení $h = g(f) = f \circ g:\ M \to P$ je prosté? Je pravda, že když g není prosté, pak h není prosté? Je pravda, že když f není prosté, pak h není prosté?

6. Totéž s „na“ místo „prosté“.

7. Nechť $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Jak vypadá šipkový graf — ve smyslu diskrétní matematiky, pro každé $n \in \mathbb{N}$ namalujeme šipku $n \longrightarrow f(n)$ — zobrazení f? Jaký je rozdíl proti bijekci $f:\ M \to M$ s konečnou množinou M?

Domácí úkoly (po 3 bodech) — lhůta pro odevzdání je 14. 10. do 15:00

1. Nalezněte vzorec pro součet

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \cdots + (-1)^{n+1}n^2$$

   (kde $n = 1, 2, 3, \ldots$) a dokažte ho matematickou indukcí.

2. Posloupnost $F_0, F_1, F_2, \ldots$ přir. čísel je dána rekurentním vzorcem $F_0 = 3$ a, pro $n > 0$, $F_n = F_0 F_1 \ldots F_{n-1} + 2$ (tj. součin všech předchozích čísel plus 2). Nalezněte vzorec pro F_n a dokažte ho matematickou indukcí.

3. Dokažte, že číslo $\sqrt[3]{3}$ je iracionální.