# Přednáška 4, 24. října 2014

**Limita a monotonie a podposloupnost.** Připomeňme si, že posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ splňující $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ se nazývá *neklesající*, při ostrých nerovnostech *rostoucí*. Obrácením nerovností dostáváme *nerostoucí*, respektive *klesající* posloupnost. Neklesající a nerostoucí posloupnosti jsou *monotónní*.

**Tvrzení (o limitě monotónní posloupnosti).** *Je-li $(a_n) \subset \mathbb{R}$ neklesající a shora omezená, pak konverguje.*

*Důkaz.* Supremum
$$a = \sup(\{a_1, a_2, \ldots\})$$
je dobře definované díky omezenosti $(a_n)$ shora. Podle definice suprema pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0$, že
$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a\ .$$
Díky monotonii $(a_n)$ a vlastnosti suprema tyto nerovnosti platí i pro každé $a_n$ s $n > n_0$. Ukázali jsme tedy, že $\lim a_n = a$. □

Totéž platí, je-li $(a_n)$ nerostoucí a zdola omezená. Snadno se podobně dokáže, že je-li $a_n$ neklesající a shora neomezená, je $\lim a_n = +\infty$. Je-li $a_n$ nerostoucí a zdola neomezená, je $\lim a_n = -\infty$. Monotonii $(a_n)$ stačí vždy předpokládat jen pro každé $n > n_0$.

Posloupnost $(b_n) \subset \mathbb{R}$ je *podposloupností* posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, když existuje takové rostoucí zobrazení $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že $b_n = a_{f(n)}$. Jinak napsáno, existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < \ldots$, že
$$b_n = a_{k_n},\ n = 1, 2, \ldots\ .$$
Je jasné, že pak $k_n \geq n$ pro každé $n$. Relace „být podposloupností“ je tranzitivní a reflexivní, ale ne antisymetrická.

**Úloha.** *Uveďte příklad dvou různých posloupností $(a_n)$ a $(b_n)$, že $(a_n)$ je podposloupností $(b_n)$ i $(b_n)$ je podposloupností $(a_n)$.*

**Tvrzení (o limitě podposloupnosti).** *Je-li $(a_n)$ podposloupnost $(b_n)$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, pak i $\lim a_n = b$.*

*Důkaz.* **Úloha.** □

Nalezneme-li tedy v posloupnosti $(a_n)$ dvě podposloupnosti s různými limitami, $\lim a_n$ neexistuje. Např. konstantní posloupnosti $(1, 1, 1, \ldots)$ a

$(-1, -1, -1, \dots)$ s limitami 1 a $-1$ jsou podposloupnostmi v $(a_n) = ((-1)^n)$, takže $\lim\,(-1)^n$ neexistuje.

**Limita a $+, \cdot, <$.** Následující výsledek je základem pro výpočty konkrétních limit.

**Tvrzení (aritmetika limit).** *Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou konvergentní posloupnosti s $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$. Pak*

1. *posloupnost $(a_n + b_n)$ též konverguje a $\lim(a_n + b_n) = a + b$,*
2. *posloupnost $(a_n b_n)$ též konverguje a $\lim(a_n b_n) = ab$,*
3. *pokud $b \neq 0$, je posloupnost $(a_n/b_n)$ definovaná pro $n > n_0$, konverguje a $\lim(a_n/b_n) = a/b$.*

*Důkaz.* 1. Podle $\Delta$-ové nerovnosti pro absolutní hodnotu,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \,.$$

Podle předpokladu pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0$, že pro $n > n_0$ je každá z obou posledních absolutních hodnot menší než $\varepsilon$. Tedy $n > n_0 \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon$, což dokazuje tvrzení o limitě součtu.

2. Nyní

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \,.$$

Pro dané $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, existuje $n_0$, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon$, tedy i $|b_n| < |b| + 1$. Tedy $n > n_0 \Rightarrow |a_n b_n - ab| < \varepsilon(|a| + |b| + 1)$, což dokazuje tvrzení o limitě součinu.

3. Konečně

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \frac{|(a_n - a)b + a(b - b_n)|}{|b_n| \cdot |b|} \\ &\leq (|b_n| \cdot |b|)^{-1}\big(|a_n - a| \cdot |b| + |a| \cdot |b - b_n|\big) \,. \end{aligned}$$

Pro dané $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < |b|/2$, existuje $n_0$, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon$, tedy i $|b_n| > |b|/2$ (speciálně $b_n \neq 0$). Tedy $n > n_0 \Rightarrow |a_n/b_n - a/b| < \varepsilon(|a| + |b|)(2/b^2)$, což dokazuje tvrzení o limitě podílu. $\square$

Lze rozšířit i na nevlastní limity, jak podrobně vyložím později. Důležité je, že aritmetika limit funguje jen jednosměrně, rovnice jako $\lim(a_n + b_n) =$

$\lim a_n + \lim b_n$ lze použít jen při čtení zprava doleva. Není rozhodně obecně pravda, že když $(a_n + b_n)$ konverguje k $a$, pak konvergují i $(a_n)$ a $(b_n)$ a $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a$ (viz např. $a_n = (-1)^n$ a $b_n = -(-1)^n$). Totéž pro součin a podíl. V tom se při zběsilém počítání limit občas dělají chyby.

V jednom případě limity součinu postačují slabší předpoklady:

**Tvrzení (násobení limitní nulou).** *Nechť $(a_n)$ je omezená a $(b_n)$ konverguje k $0$. Pak $\lim(a_n b_n) = 0$.*

*Důkaz.* **Úloha.** □

**Příklad.** *Nechť je $(a_n)$ dána rekurencí $a_1 = 2$ a $a_{n+1} = a_n/2 + 1/a_n$. Existuje $\lim a_n$? Pokud ano, čemu se rovná?*

Prvních pár hodnot posloupnosti je $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{17}{12}$ a $a_4 = \frac{577}{408}$. Zřejmě vždy $a_n > 0$. Zdá se, že $(a_n)$ je nerostoucí. Dokážeme to. Potřebujeme, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo, že $a_{n+1} \leq a_n$, to jest $a_n/2 + 1/a_n \leq a_n$, což je ekvivalentní nerovnosti $\sqrt{2} \leq a_n$. Potřebujeme tedy ukázat, že naše posloupnost má tuto lepší dolní mez. Pro $n = 1$ tato nerovnost jistě platí a pro $n > 1$ rovněž: $a_n = a_{n-1}/2 + 1/a_{n-1} = (a_{n-1} + 2a_{n-1}^{-1})/2 \geq \sqrt{a_{n-1} 2a_{n-1}^{-1}} = \sqrt{2}$ (toto není důkaz indukcí). Použili jsme pro $a = a_{n-1}$ a $b = 2a_{n-1}^{-1}$ nerovnost $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$ $(a, b \geq 0)$ mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Takže $(a_n)$ je nerostoucí. Protože je (zdola) omezená, má podle tvrzení výše vlastní limitu $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Patrně $a \geq \sqrt{2}$. Tvrdím, že tato limita splňuje rovnici, jež vznikne z rekurence $a_{n+1} = a_n/2 + 1/a_n$ smazáním indexů. Limita levé strany je $\lim a_{n+1} = \lim a_n = a$ podle tvrzení o limitě podposloupnosti a limita pravé strany je $\lim(a_n/2 + 1/a_n) = (\lim a_n)/2 + 1/\lim a_n = a/2 + 1/a$ podle tvrzení o aritmetice limit. Takže

$$a = a/2 + 1/a, \quad \text{to jest } a^2/2 = 1 \text{ a } \ a = \sqrt{2}\,.$$

Dokázali jsme, že $\lim a_n = a = \sqrt{2}$.

**Tvrzení (limita a uspořádání).** *Nechť posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ mají vlastní limity $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$.*

1. *Když $a < b$, tak existuje $n_0$, že $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n$.*

2. *Když $a_n \leq b_n$ pro každé $n > n_0$, pak $a \leq b$.*

*Důkaz.* 1. Pro $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$, existuje $n_0$, že pro $n > n_0$ je $a_n < a+\varepsilon < (a+b)/2 < b-\varepsilon < b_n$, takže $a_n < b_n$.

2. Kdyby bylo $a > b$, pro velké $n$ by podle 1 platilo $a_n > b_n$, což je ve sporu s předpokladem. $\square$

Toto tvrzení platí beze změny i pro nevlastní limity (kde bereme $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$). Je třeba nezapomínat, že ostrá nerovnost může v limitě přejít v rovnost: $a_n = 1 - 1/n < b_n = 1$ pro každé $n$, ale $\lim a_n = \lim b_n = 1$.

**Tvrzení (věta o 2 policajtech).** *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ *splňují, že* $\lim a_n = \lim b_n = a \in \mathbb{R}$ *a pro každé* $n > n_0$ *je* $a_n \leq c_n \leq b_n$. *Pak* $(c_n)$ *konverguje a* $\lim c_n = a$.

*Důkaz.* Pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$U(a,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}\ .$$

Protože to je interval, platí: $c, d \in U(a,\varepsilon), c \leq e \leq d \Rightarrow e \in U(a,\varepsilon)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $n_0$, že $n > n_0 \Rightarrow a_n, b_n \in U(a,\varepsilon)$ a $a_n \leq c_n \leq b_n$. Tedy i $c_n \in U(a,\varepsilon)$, takže $\lim c_n = a$. $\square$

I toto tvrzení se snadno rozšíří na nevlastní limity: pro $a = +\infty$ stačí pouze jeden policajt $a_n$ a pro $a = -\infty$ stačí pouze policajt $b_n$. Smysl tvrzení je geometrický: *$\varepsilon$-ové okolí $U(a,\varepsilon)$ bodu $a$* je *konvexní*, s každými dvěma body obsahuje i je spojující úsečku (zde interval, jsme v jedné dimenzi).