Matematická analýza I - cvičení 6 14.11.2017

Úloha 1: Spočítejte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{q^n}$, pro $q > 1$ a $k \in \mathbb{N}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a + \dfrac{b}{n}\right)^s$, pro $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ a $s > 0$.

Úloha 2: Určete

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n+2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$

Úloha 3: Ukažte, že následující rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$ mají limity a spočítejte je.

a) $a_1 = \sqrt{c}$, kde $c > 0$ a $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$.

b) $a_1 = 0$ a $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(x - a_n)^2$, pro $0 \leq x \leq 1$.

c) $a_1 = \sqrt{2}$ a $a_{n+1} = \sqrt{2 - a_n}$.

d) $a_1 = 1$ a $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$

e) $a_1 = c$, kde $c > 0$ a $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$.

Úloha 4: Ukažte, že posloupnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí a posloupnost $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ klesající.
Odtud ukažte, že tyto posloupnosti mají stejnou limitu. Tuto limitu označíme e (je to jedna z možných definic Eulerova čísla, tj. základu přirozeného logaritmu)

Úloha 5: Pro $x \in \mathbb{R}$ definujme $\mathrm{e}^x := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$. Dokažte pak, že $1 + x \leq \mathrm{e}^x$.

Úloha 6: Určete limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{3n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^n$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+5}\right)^{n+7}$