Matematická analýza I - cvičení 3 17.10.2017

Úloha 1: Rozhodněte a své tvrzení dokažte:

a) Existuje zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, které je na? Existuje také bijekce $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$?

b) Existuje zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, které je na?

c) (**) Existuje zobrazení $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, které je na?

Úloha 2: (*) Dokažte, že množina $\mathbb{Q}$ je hustá v množině $\mathbb{R}$, tj. ukažte, že pro každé $a < b, a, b \in \mathbb{R}$ existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.

Úloha 3: Nechť M je zdola omezená, neprázdná množina reálných čísel. Dokažte, že má (reálné) infimum. (Můžete využívat existenci suprema pro shora omezené množiny.)

Úloha 4: Určete vztah mezi supremy a infimy množin $A, B \subseteq \mathbb{R}$, pokud platí, že $A \subseteq B$.

Úloha 5: V oboru reálných čísel určete suprema a infima následujících množin (pokud existují). Jsou to zároveň maxima či minima těchto množin?

a) $M = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

b) $M = \left\{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $M = \{0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; \dots\}$

d) $M = \{\sin x : x \in \langle 0, 2\pi)\}$

e) $M = \{\sin x : x \in (0, \pi)\}$

f) $M = \left\{1 - \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$

g) $M = \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$

h) $M = \left\{\frac{p}{p+q} : p, q \in \mathbb{N}\right\}$

i) $M = \left\{\frac{n+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

j) $M = \left\{n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

k) $M = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$

l) $M = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$

m) $M = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$

n) $M = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

o) $M = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{Z}\}$

p) $M = \{5^{(-1)^j 3^k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$

q) $M = \left\{\cos\left(\frac{n+1}{n}\pi\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

r) $M = \left\{ \cos\left(\frac{n+1}{n} \pi \right) : n \in \mathbb{N}, n \text{ sudé} \right\}$

s) $M = \left\{ \cos\left(\frac{n+1}{n} \pi \right) : n \in \mathbb{N}, n \text{ liché} \right\}$

Úloha 6: Pro neprázdné a shora i zdola omezené množiny reálných čísel A a B vyjádřete co nejpřesněji suprema a infima následujících množin pomocí suprem a infim množin A a B.

a) $A \cap B$, za předpokladu, že tento průnik je neprázdný.

b) $A \setminus B$, za předpokladu, že tento rozdíl je neprázdný.

c) cA pro $c \geq 0$, kde $cA = \{c \cdot a : a \in A\}$.

d) cA pro $c < 0$.

e) $A + B$, kde $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$.

f) $A - B$, kde $A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}$.

g) (*) $A \cdot B$, kde $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A,\ b \in B\}$.