Lineární algebra I - cvičení 9 13.12.2016

Příklad 1: Rozhodněte, zda následující zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ jsou lineární.

a) $f(A) = A^T$

Výsledek: Ano.

b) $f(A) = \text{trace}(A)$

Výsledek: Ano.

c) $f(A) = A^2$

Výsledek: Ne.

d) $f(A) = RREF(A)$

Výsledek: Ne.

Příklad 2: Rozhodněte, zda zobrazení $(x_1, x_2, x_3, ...) \to (x_2, x_3, ...)$ na prostoru reálných posloupností je lineární.

Výsledek: Ano.

Příklad 3: Nechť V je vektorový prostor kladných reálných čísel nad tělesem $\mathbb{R}$, kde $x \oplus y = xy$ a $\alpha \odot x = x^\alpha$. Rozhodněte, je-li logaritmus na V lineární zobrazení.

Výsledek: Ano.

Příklad 4: Určete matice následujících lineárních zobrazení v rovině ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) vůči kanonické bázi kan.

a) osová souměrnost podle osy 1. a 3. kvadrantu.

Výsledek: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) otočení o $90°$ kolem počátku proti směru hodinových ručiček.

Výsledek: Matice otočení $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) otočení o úhel α kolem počátku proti směru hodinových ručiček (první osa je vodorovná, druhá svislá).

Výsledek: Matice otočení $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

d) projekce na první souřadnici $p_1 : (x, y) \to (x, 0)$.

Výsledek: Matice projekce je ${}_{kan}[p_1]_{kan} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 5: Nalezněte matici zobrazení $f : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ vůči kanonické bázi kan (shodná báze v obou prostorech). O zobrazení f je známo, že převádí vektory $u_1 = (2, 4, 1)^T$, $u_2 = (2, 3, 4)^T$ a $u_3 = (3, 0, 1)^T$ na vektory $f(u_1) = (2, 1, 2)^T$, $f(u_2) = (0, 4, 1)^T$ a $f(u_3) = (4, 4, 1)^T$.

Výsledek: Maticí zobrazení je ${}_{kan}[f]_{kan} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 6: Mějme v prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ dané báze
$A = ((1,2,0,1)^T, (4,1,3,1)^T, (3,1,3,4)^T, (2,0,2,2)^T)$,
$B = ((1,2,3,1)^T, (4,4,1,1)^T, (2,0,2,1)^T, (3,1,4,0)^T)$.
Nalezněte matice přechodu:

a) ${}_{\text{kan}}[id]_A$, tj. od báze A ke kanonické bázi.

Výsledek: ${}_{kan}[id]_A = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

b) ${}_B[id]_{\text{kan}}$, tj. od kanonické báze k bázi B.

Výsledek: ${}_B[id]_{kan} = \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) ${}_B[id]_A$, tj. od báze A k bázi B.

Výsledek: ${}_B[id]_A = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Příklad 7: Nechť prostor polynomů nad $\mathbb{R}$ stupně nejvýše 4 má bázi $A = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$. Určete matici ${}_{\text{kan}}[D_x]_A$ pro zobrazení D_x jež funkci $f(x)$ přiřadí její derivaci $f'(x)$.

(Za kanonickou bázi zde považujte kan $= (x^0, \ldots, x^4)$.)

Výsledek: Hledaná matice je ${}_{kan}[D_x]_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Příklad 8: Určete matici přechodu od báze B do báze B' prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li $B = \{x^2 + 1, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}$, a $B' = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}$.

Výsledek:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}$$