Lineární algebra I - cvičení 8 6.12.2016

Příklad 1: Dokažte, že pokud $U \cap V = \{o\}$, pak každý vektor $w \in U + V$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru $w = u + v$, kde $u \in U$ a $v \in V$.

Příklad 2: Buďte U, V podprostory stejné dimenze v prostoru Z. Ukažte, že existuje podprostor W takový, že $Z = U \oplus W = V \oplus W$, kde $\oplus$ značí direktní součet.

Příklad 3: Ukažte, že pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí, že její jádro $Ker(\mathbf{A})$ je podprostorem $\mathbb{T}^n$.

Příklad 4: Ukažte, že pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{T}^{m \times n}$ platí:

1. $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}x \,|\, x \in \mathbb{T}^n\}$
2. $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A}^T y \,|\, y \in \mathbb{T}^m\}$

Příklad 5: Rozhodněte, zda se nad $\mathbb{R}$ rovnají vektorové prostory $U = \mathrm{span}\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$ a $V = \mathrm{span}\{(2, 1, 3), (1, 0, 2)\}$.

Výsledek: Ano.

Příklad 6: Pro matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ najděte báze prostorů $\mathcal{S}(\mathbf{A}), \mathcal{R}(\mathbf{A}), \mathrm{Ker}(\mathbf{A})$.

Výsledek: Báze $\mathcal{R}(A)$ je např. $\{(1, 2, 2, 3), (0, 0, 1, 1)\}$, báze $\mathcal{S}(A)$ je např. $\{(1, 2, 3), (0, 3, 5)\}$, báze $\mathrm{Ker}(A)$ je např. $\{(-2, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1)\}$.

Příklad 7: Najděte matici $\mathbf{A}$ takovou, že $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ obsahuje vektory $(1, 1), (1, 2)$ a $\mathcal{S}(A)$ obsahuje $(1, 0, 0)^T, (0, 0, 1)^T$.

Příklad 8: Rozhodněte, zda platí pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

1. $\mathrm{Ker}(\mathbf{B}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$
2. $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{B})$ a $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ implikuje $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.
3. $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{B})$ a $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ implikuje $\mathbf{A} = \mathbf{QB}$ pro nějakou regulární matici $\mathbf{Q}$.
4. $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ právě tehdy, když $RREF(\mathbf{A}) = RREF(\mathbf{B})$.
5. $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{B})$ právě tehdy, když $RREF(\mathbf{A}) = RREF(\mathbf{B})$.

Výsledek: 1) ano, 2) ne, 3) ano, 4) ano, 5) ne