Lineární algebra I - cvičení 7   29.11.2016

Příklad 1: Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

Výsledek: Např. lze přidat libovolný vektor kanonické báze.

b) $M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

Výsledek: Např. $M \cup \{1\}$ *nebo* $M \cup \{x^3\}$.

c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ v prostoru $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Výsledek: Z matic $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *lze M doplnit na bázi* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *pouze o* $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(Tyto čtyři matice odpovídají kanonické bázi, vnímáme-li $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *jako* $\mathbb{R}^4$.*)*

Příklad 2: Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

a) $U_1 = \mathcal{L}((4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T,$
$(2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T)$.

Výsledek: $\dim(U_1) = 3$.

Báze U_1 je např. $(1,2,3,2,2,4,3)^T, (0,1,1,0,2,3,1)^T, (0,0,1,3,1,3,1)^T$.

b) $V_1 = \{(x_1,\ldots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$.

Výsledek: $\dim(V_1) = 4$.

Báze V_1 je např. $(2,1,0,0,0,0,0)^T, (1,0,2,1,0,0,0)^T, (1,0,1,0,1,0,0)^T, (1,0,4,0,0,3,1)^T$.

Příklad 3: Rozhodněte, zdali prostory U_i a V_i jsou v inkluzi, a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

Tyto podprostory $\mathbb{Z}_5^7$ jsou definovány následovně:

a) $U_1 = \mathcal{L}((4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T,$
$(2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T)$

$V_1 = \{(x_1,\ldots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 = 0,$
$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + 4x_7 = 0,\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 + 2x_7 = 0\}$

Výsledek: Platí inkluze $U_1 \subset V_1$.

b) $U_2 = \mathcal{L}((1,2,4,2,3,1,2)^T, (2,3,4,1,2,1,3)^T, (3,4,1,1,4,1,4)^T,$
$(4,0,2,3,3,4,1)^T, (4,3,1,3,2,3,2)^T)$

$V_2 = \{(x_1,\ldots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 0,$
$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 = 0,\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_6 = 0\}$

Výsledek: $V_2 \subset U_2$.

Příklad 4: V prostoru $\mathbb{R}^4$ určete souřadnice vektoru $[u]_X$ vzhledem k uspořádané bázi

$X = ((1,-3,7,2)^T, (3,2,1,-4)^T, (0,-1,4,-3)^T, (-2,4,-3,0)^T)$

pro vektory $u_1 = (2,2,9,-5)^T,\ u_2 = (-7,2,9,-8)^T$ a $u_3 = (4,-42,31,20)^T$.

Výsledek: $[u_1]_X = (1,1,1,1)^T, [u_2]_X = (0,-1,4,2)^T, [u_3]_X = (2,-4,0,-7)^T$.

Příklad 5: Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.

Výsledek: Nové souřadnice jsou $[u]_Y = (a_1, a_3, a_4 - a_1, a_2 - a_3)^T$.

Příklad 6: Nechť V je množina reálných symetrických čtvercových matic řádu tři s nulami na hlavní diagonále.

Ukažte, že V tvoří podprostor $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Určete dimenzi prostoru V a sestavte nějakou jeho bázi.

Výsledek: $\dim(V) = 3$, *za bázi lze vzít např. matice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 7: V prostoru $\mathcal{P}^4$ nad $\mathbb{R}$ (tj. polynomů stupně nejvýše 4) s bazí

$$X = (x^4 + x^3,\ x^3 + x^2,\ x^2 + x,\ x + 1,\ x^4 + 1)$$

určete souřadnice $[f]_X$ následujících vektorů

a) $f(x) = x^4 - 1$.

Výsledek: $[f]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)^T = (1, -1, 1, -1, 0)^T$.

b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Výsledek: $[f]_X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$.

c) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Výsledek: $[f]_X = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$.

d) $f(x) = x^3 + x$.

Výsledek: $[f]_X = (1, 0, 0, 1, -1)^T$

Příklad 8: V prostoru reálných spojitých funkcí nad $\mathbb{R}$ uvažujme podprostor generovaný funkcemi $\sin^2(x)$, $\sin(2x)$, $\cos^2(x), \cos(2x)$ a $f(x) = 1$. Najděte bázi tohoto podprostoru.

Výsledek: Hledanou bázi tvoří např. $f(x), \sin(2x)$ *a* $\sin^2(x)$.

Příklad 9: Najděte bázi vektorového prostoru $\{p \in \mathcal{P}^5 \mid (\forall x \in \mathbb{R})(p(x) = -p(-x))\}$ nad $\mathbb{R}$.

Výsledek: Např. x, x^3, x^5.

Příklad 10: Určete počet podprostorů $\mathbb{Z}_p^2$ nad $\mathbb{Z}_p$.

Výsledek: $p + 3$

Příklad 11: Určete dimenzi zadaného vektorového prostoru nad tělesem $\mathbb{Q}$:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) := \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a, b, c, \in \mathbb{Q}\}$

Výsledek: 3

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) := \{a + b\sqrt{2} + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

Výsledek: 2