Lineární algebra I - cvičení 6 22.11.2016

Příklad 1: Označme symbolem $\mathbb{R}^+$ kladná reálná čísla a definujme operace $\oplus$ na $\mathbb{R}^+$ a $\odot : \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ následovně:

$$u \oplus v = uv, \qquad a \odot u = u^a$$

Je $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$?

Výsledek: Ano.

Příklad 2: Nechť X je libovolná neprázdná množina a $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ je těleso.

Označme $\mathbb{K}^X$ množinu všech zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$.

Definujme součet $\oplus$ na $\mathbb{K}^X$ a součin $\odot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^X \to \mathbb{K}^X$ následovně:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (a \odot f)(x) = a \cdot f(x).$$

a) Ukažte, že $(\mathbb{K}^X, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor.

b) Jaký vektorový prostor získáme, je-li X konečná?

Výsledek: Pro $|X| = n$ dostaneme aritmetický vektorový prostor izomorfní s $\mathbb{K}^n$.

c) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $X = \mathbb{N}$?

Výsledek: Pro $X = \mathbb{N}$ dostaneme vektorový prostor všech posloupností v $\mathbb{K}$.

d) Jaký vektorový prostor získáme, je-li $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a $X = \mathbb{R}$?

Výsledek: Dostaneme vektorový prostor všech reálných funkcí.

Příklad 3: V systému podmnožin množiny $A = \{a, b, c, d, e\}$ chápaném jako vektorový prostor nad $\mathbb{Z}_2$ určete

- nulový vektor $\mathbf{0}$,
- opačný vektor $-\mathbf{u}$ k vektoru $\mathbf{u} = \{b, d, e\}$,
- výsledek lineární kombinace $\mathbf{s} = 1 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{w} + 0 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{y}$,
  kde $\mathbf{v} = \{a, c, d\}$, $\mathbf{w} = \{b, c\}$, $\mathbf{x} = \{a, b, d, e\}$ a $\mathbf{y} = \{b, e\}$,
- zdali lze zapsat vektor $\mathbf{z} = \{a, b, e\}$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$.

Příklad 4: Rozhodněte, zdali je struktura $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \oplus, \odot)$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_3$, kde $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \mod 6$ a $a \odot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} \mod 6$.

Výsledek: Není.

Příklad 5: V prostoru $\mathbb{R}^4$ zapište vektor $(-7, 12, 2, -4)^T$ jako lineární kombinaci vektorů $(-5, 5, 1, -1)^T$, $(2, -5, 0, 2)^T$, $(3, 2, 0, -2)^T$ a $(2, -3, 1, 1)^T$. Je toto vyjádření jednoznačné?

Koeficienty hledáme jako řešení soustavy lineárních rovnic. Získáme koeficienty lineární kombinace např. $(2, 0, 1, 0)^T$. Protože soustava nemá jednoznačné řešení, toto vyjádření není jednoznačné, vyhovuje libovolné $(2, 0, 1, 0)^T + p(-1, -2, -1, 1)^T$.

Příklad 6: Vezměme pevnou čtvercovou matici $\mathbf{D}$ nad tělesem $\mathbb{K}$. Ukažte, že matice, které v součinu komutují s maticí $\mathbf{D}$ tvoří vektorový prostor.

Příklad 7: Nech u, v, w jsou lineárně nezávislé vektory z vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zdali jsou následující množiny lineárně závislé či nezávislé.

a) $\{u, u+v, u+w\}$.

Výsledek: $\{u, u+v, u+w\}$ *lineárně nezávislá.*

b) $\{u+v, u-v, w\}$.

Výsledek: $\{u+v, u-v, w\}$ *je lineárně nezávislá.*

c) $\{u+v, u-v, u+w, u-w\}$.

Výsledek: $\{u+v, u-v, u+w, u-w\}$ *je lineárně závislá, např. s koeficienty* $(1, 1, -1, -1)^T$.

d) $\{u+v, u+w, v+w\}$.

Výsledek: $\{u+v, u+w, v+w\}$ *je lineárně nezávislá.*

e) $\{u, v+w\}$.

Výsledek: $\{u, v+w\}$ *je lineárně nezávislá.*

Příklad 8: Určete, zdali je následující množina vektorů nezávislá v prostorech $\mathbb{R}^4, \mathbb{Z}_3^4$ a $\mathbb{Z}_5^4$. Pokud nikoli, najděte vyjádření nějakého vektoru jako lineární kombinaci ostatních.

a) $X_1 = \{(0, 1, 2, 1)^T, (1, 2, 0, 0)^T, (1, 1, 2, 0)^T, (1, 2, 1, 1)^T\}$.

Výsledek: X_1 *je v* $\mathbb{R}^4$ *lineárně nezávislá.* X_1 *je v* $\mathbb{Z}_3^4$ *lineárně závislá, např. s koeficienty* $(2, 0, 2, 1)^T$, *a v* $\mathbb{Z}_5^4$ *je lineárně nezávislá.*

b) $X_2 = \{(1, 1, 2, 0)^T, (1, 2, 1, 1)^T, (0, 1, 2, 1)^T, (1, 1, 0, 0)^T\}$.

Výsledek: X_2 *je v* $\mathbb{R}^4$ *lineárně závislá s koeficienty* $(1, 2, -2, -3)^T$, *v* $\mathbb{Z}_3^4$ *lineárně závislá s* $(1, 2, 1, 0)^T$, *a v* $\mathbb{Z}_5^4$ *lineárně závislá s* $(1, 2, 3, 2)^T$.

Příklad 9: Určete, zdali následující množiny vektorů jsou nezávislé v prostoru reálných funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nad tělesem $\mathbb{R}$)

a) $\{2x-1, x-2, 3x\}$.

Výsledek: $\{2x-1, x-2, 3x\}$ *je lineárně závislá množina.*

b) $\{x^2+2x+3, x+1, x-1\}$.

Výsledek: $\{x^2+2x+3, x+1, x-1\}$ *je lineárně nezávislá množina.*

Příklad 10: Rozhodněte, zda následující tvoří podprostor prostoru reálných posloupností $\mathbb{R}^\infty$:

a) posloupnosti tvaru
$(a, b, c, a, b, c, a, b, c, \dots)$ pro $a, b, c \in \mathbb{R}$

Výsledek: Ano.

b) posloupnosti s nekonečně mnoha nulami

Výsledek: Ne.

c) posloupnosti s konečně mnoha nenulami

Výsledek: Ano.

d) neklesající posloupnosti

Výsledek: Ne.

e) konvergentní posloupnosti

Výsledek: Ano.

f) omezené posloupnosti

Výsledek: Ano.

g) aritmetické posloupnosti

Výsledek: Ano.