Lineární algebra I - cvičení 5 15.11.2016

Permutace

Příklad 1: Určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace u následujících permutací: p, q a u jejich složení $q \circ p$ a $p \circ q$.

(Permutace skládáme jeko zobrazení, tedy $(q \circ p)(i) = q(p(i))$.)

a) $p = (6, 4, 1, 5, 3, 2)$, $q = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$.

$q \circ p = (1, 2, 6, 5, 3, 4)$, $p \circ q = (2, 5, 1, 4, 3, 6)$

Permutace p má 11 inverzí: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)$, *viz např. z grafu křížení.*

q má 12 inverzí, obě složené permutace $q \circ p$ i $p \circ q$ mají 5 inverzí.

Cyklický zápis $p = (1, 6, 2, 4, 5, 3)$, $q = (1, 6), (2, 4), (3), (5)$,
$q \circ p = (1), (2), (3, 6, 4, 5)$, $q \circ p = (1, 2, 5, 3), (4), (6)$

Rozklad na transpozice: $p = (1, 6) \circ (6, 2) \circ (2, 4) \circ (4, 5) \circ (5, 3)$, $q = (1, 6) \circ (2, 4)$, $q \circ p = (3, 6) \circ (6, 4) \circ (4, 5)$, $p \circ q = (1, 2) \circ (2, 5) \circ (5, 3)$.

Znaménka jsou po řadě $-1, +1, -1$ *a* -1.

Inverzní permutace jsou $p^{-1} = (3, 6, 5, 2, 4, 1)$, $q^{-1} = (6, 4, 3, 2, 5, 1)$, $(q\circ p)^{-1} = (1, 2, 5, 6, 4, 3)$, $(p\circ q)^{-1} = (3, 1, 5, 4, 2, 6)$.

b) $p = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9)$, $q = (1, 3, 5, 7, 9, 8, 6, 4, 2)$.

Výsledek: *p:* $p^{-1} = (1, 2, 7, 6, 5, 4, 3, 8, 9)$
10 inverzí, cykly $(1), (2), (3, 7), (4, 6), (5), (8), (9)$, *2 transpozice* $(3, 7) \circ (4, 6)$, *znaménko* $+1$,

q: $q^{-1} = (1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5)$
16 inverzí, cykly $(1), (2, 3, 5, 9), (4, 7, 6, 8)$, *6 transpozic, znaménko* $+1$,

$q \circ p = (1, 3, 6, 8, 9, 7, 5, 4, 2)$*:* $(q \circ p)^{-1} = (1, 9, 2, 8, 7, 3, 6, 4, 5)$
18 inverzí, cykly $(1), (2, 3, 6, 7, 5, 9), (4, 8)$, *6 transpozic, znaménko* $+1$,

$p \circ q = (1, 7, 5, 3, 9, 8, 4, 6, 2)$*:* $(p \circ q)^{-1} = (1, 9, 4, 7, 3, 8, 2, 6, 5)$
18 inverzí, cykly $(1), (2, 7, 4, 3, 5, 9), (6, 8)$, *6 transpozic, znaménko* $+1$.

c) $p = (5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6)$, $q = (8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9)$.

Výsledek: *p:* $p^{-1} = (5, 4, 3, 2, 1, 9, 8, 7, 6)$,
16 inverzí, cykly $(1, 5), (2, 4), (3), (6, 9), (7, 8)$, *4 transpozice, znaménko* $+1$,

q: $q^{-1} = (5, 4, 6, 3, 7, 2, 8, 1, 9)$,
16 inverzí, cykly $(1, 8, 7, 5), (2, 6, 3, 4), (9)$, *6 transpozic, znaménko* $+1$,

$q \circ p = (1, 2, 4, 6, 8, 9, 7, 5, 3)$, $(q \circ p)^{-1} = (1, 2, 9, 3, 8, 4, 7, 5, 6)$
12 inverzí, cykly $(1), (2), (3, 4, 6, 9), (5, 8), (7)$, *4 transpozic, znaménko* $+1$,

$p \circ q = (7, 9, 2, 4, 5, 3, 1, 8, 6)$, $(p \circ q)^{-1} = (7, 3, 6, 4, 5, 9, 1, 8, 2)$

20 inverzí, cykly $(1, 7), (2, 9, 6, 3), (4), (5), (8)$, *4 transpozic, znaménko* $+1$.

d) $p = (3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7)$, $q = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

Výsledek: *p:* $p^{-1} = (7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3)$,
18 inverzí, cykly $(1, 3, 9, 7), (2, 6, 8, 4), (5)$, *6 transpozic, znaménko* $+1$,

q: $q^{-1} = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$,
36 inverzí, cykly $(1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5)$, *4 transpozice, znaménko* $+1$,

$q \circ p = (7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3)$, $(q \circ p)^{-1} = (3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 6)$
18 inverzí, cykly $(1, 7, 9, 3), (2, 4, 8, 6), (5)$, *6 transpozic, znaménko* $+1$,

$p \circ q = (7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3)$, $(p \circ q)^{-1} = (3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 6)$
18 inverzí, cykly $(1, 7, 9, 3), (2, 4, 8, 6), (5)$, *6 transpozic, znaménko* $+1$,

Všimněte si, že $q \circ p = p \circ q$.

Příklad 2: Kolik existuje permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ s právě jedním cyklem?

Výsledek: *Permutací s jedním cyklem je* $(n - 1)!$.

Tělesa

Příklad 3: Najděte všechna řešení soustavy s následující maticí nad tělesem $\mathbb{Z}_7$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Výsledek: $\mathbf{x} = (2, 6, 2)^T$.

Příklad 4: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic v tělesech $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7$ a $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Výsledek: Nad $\mathbb{Z}_5$ *vyjde* $\mathbf{x} = (2, 0, 4)^T + (3, 1, 0)^T p$.

Nad $\mathbb{Z}_7$ *soustava nemá žádné řešení.*

Nad $\mathbb{R}$ *dostaneme* $\mathbf{x} = (1, 1/7, 3/7)^T$.

Příklad 5: Z axiomů odvoďte, že pro počítání v tělese $\mathbb{K}$ platí:

a) Pro $a, b \in \mathbb{K}$ má rovnice $a + x = b$ jednoznačné řešení $x \in \mathbb{K}$.

b) Pokud $a + b = a + c$, potom $b = c$.

c) Jednotka a inverzní prvky jsou určeny jednoznačně.

d) Pro všechna $a \in \mathbb{K}$ platí $(-1)a = -a$.

Příklad 6: Invertujte následující matice v tělesech $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_5$

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Výsledek: Nad $\mathbb{Z}_3$*:* $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ *je singulární. Nad* $\mathbb{Z}_5$*:* $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ *je singulární.*

Příklad 7: Najděte matici $\mathbf{A}$, která nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ splňuje rovnost

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Výsledek: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Příklad 8: Pro $n \in \mathbb{N}$ a asociativní operaci $\cdot$ označme $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, kde na pravé straně rovnosti se prvek a vyskytuje n-krát.

a) Určete hodnoty $2^{101}, 3^{1\,001}$ a $4^{1\,000\,001}$ v tělese $\mathbb{Z}_{17}$.

Výsledek: Po řadě výsledky jsou $15, 14, 4$.

b) Určete hodnoty $5^{100}, 8^{200}, 11^{300}$ a 18^{400} v tělese $\mathbb{Z}_{19}$.

Výsledek: Po řadě výsledky jsou $5, 7, 1, 1$.