Lineární algebra I - cvičení 4 1.11.2016

Interpolace polynomem

Příklad 1: Pomocí Lagrangeovy interpolace proložte kvadratický polynom (parabolu) body

a) $(-1,-9)$, $(1,-3)$ a $(2,3)$.

Výsledek: Hledaný polynom je $p(x) = x^2 + 3x - 7$.

Příklad 2: Najděte všechny polynomy čtvrtého stupně, jejichž graf prochází zadanými body.

a) $[-1,3]$, $[0,-3]$, $[1,3]$ a $[2,15]$.

Výsledek: Všechny polynomy čtvrtého stupně mají tvar $p(x) = ax^4 - (1+2a)x^3 + (6-a)x^2 + (1+2a)x - 3$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Grupy

Příklad 3: Ukažte, že v každé grupě platí $(a^{-1})^{-1} = a$.

Příklad 4: Ukažte, že v každé grupě platí $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Příklad 5: Rozhodněte, zda tvoří uvedené množiny s danou operací grupy či nikoliv. Pokud ano, jsou to Abelovy grupy?

1. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = |ab|$
2. množina posunutí v $\mathbb{R}^n$ se skládáním
3. $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde operace $\circ$ je aritmetický/geometrický průměr dvou čísel
4. $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) ; z \in \mathbb{Z}\}$ s maticovým násobením

Příklad 6: Najděte nějakou netriviální podgrupu zadané grupy:

1. $(\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ spojitá}\}, +)$
2. $(\mathbb{R}^{n \times n}, +)$
3. $GL(n, \mathbb{R})$, tj. multiplikativní grupy regulárních matic řádu n s násobením

Permutace

Příklad 7: Určete grafy, cykly, rozklad na transpozice, počet inverzí, znaménko a inverzní permutace u následujících permutací: p, q a u jejich složení $q \circ p$ a $p \circ q$.

(Permutace skládáme jeko zobrazení, tedy $(q \circ p)(i) = q(p(i))$.)

a) $p = (6,4,1,5,3,2)$, $q = (6,4,3,2,5,1)$.

$q \circ p = (1,2,6,5,3,4)$, $p \circ q = (2,5,1,4,3,6)$

Permutace p má 11 inverzí: $(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$, $(2,3),(2,5),(2,6)$, $(4,5),(4,6),(5,6)$, viz např. z grafu křížení.

q má 12 inverzí, obě složené permutace $q \circ p$ i $p \circ q$ mají 5 inverzí.

Cyklický zápis $p = (1,6,2,4,5,3)$, $q = (1,6),(2,4),(3),(5)$,
$q \circ p = (1),(2),(3,6,4,5)$, $q \circ p = (1,2,5,3),(4),(6)$

Rozklad na transpozice: $p = (1,6) \circ (6,2) \circ (2,4) \circ (4,5) \circ (5,3)$, $q = (1,6) \circ (2,4)$, $q \circ p = (3,6) \circ (6,4) \circ (4,5)$, $p \circ q = (1,2) \circ (2,5) \circ (5,3)$.

Znaménka jsou po řadě $-1,+1,-1$ a -1.

Inverzní permutace jsou $p^{-1} = (3,6,5,2,4,1)$, $q^{-1} = (6,4,3,2,5,1)$, $(q \circ p)^{-1} = (1,2,5,6,4,3)$, $(p \circ q)^{-1} = (3,1,5,4,2,6)$.

b) $p = (1,2,7,6,5,4,3,8,9)$, $q = (1,3,5,7,9,8,6,4,2)$.

Výsledek: p: $p^{-1} = (1,2,7,6,5,4,3,8,9)$
10 inverzí, cykly $(1),(2),(3,7),(4,6),(5),(8),(9)$, 2 transpozice $(3,7) \circ (4,6)$, znaménko $+1$,

q: $q^{-1} = (1,9,2,8,3,7,4,6,5)$
16 inverzí, cykly $(1),(2,3,5,9),(4,7,6,8)$, 6 transpozic, znaménko $+1$,

$q \circ p = (1,3,6,8,9,7,5,4,2)$: $(q \circ p)^{-1} = (1,9,2,8,7,3,6,4,5)$
18 inverzí, cykly $(1),(2,3,6,7,5,9),(4,8)$, 6 transpozic, znaménko $+1$,

$p \circ q = (1,7,5,3,9,8,4,6,2)$: $(p \circ q)^{-1} = (1,9,4,7,3,8,2,6,5)$
18 inverzí, cykly $(1),(2,7,4,3,5,9),(6,8)$, 6 transpozic, znaménko $+1$.

c) $p = (5,4,3,2,1,9,8,7,6)$, $q = (8,6,4,2,1,3,5,7,9)$.

Výsledek: p: $p^{-1} = (5,4,3,2,1,9,8,7,6)$,
16 inverzí, cykly $(1,5),(2,4),(3),(6,9),(7,8)$, 4 transpozice, znaménko $+1$,

q: $q^{-1} = (5,4,6,3,7,2,8,1,9)$,
16 inverzí, cykly $(1,8,7,5),(2,6,3,4),(9)$, 6 transpozic, znaménko $+1$,

$q \circ p = (1,2,4,6,8,9,7,5,3)$, $(q \circ p)^{-1} = (1,2,9,3,8,4,7,5,6)$
12 inverzí, cykly $(1),(2),(3,4,6,9),(5,8),(7)$, 4 transpozic, znaménko $+1$,

$p \circ q = (7,9,2,4,5,3,1,8,6)$, $(p \circ q)^{-1} = (7,3,6,4,5,9,1,8,2)$

20 inverzí, cykly $(1,7),(2,9,6,3),(4),(5),(8)$, 4 transpozic, znaménko $+1$.

d) $p = (3,6,9,2,5,8,1,4,7)$, $q = (9,8,7,6,5,4,3,2,1)$.

Výsledek: p: $p^{-1} = (7,4,1,8,5,2,9,6,3)$,
18 inverzí, cykly $(1,3,9,7),(2,6,8,4),(5)$, 6 transpozic, znaménko $+1$,

q: $q^{-1} = (9,8,7,6,5,4,3,2,1)$,
36 inverzí, cykly $(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5)$, 4 transpozice, znaménko $+1$,

$q \circ p = (7,4,1,8,5,2,9,6,3)$, $(q \circ p)^{-1} = (3,6,9,2,5,8,1,4,6)$
18 inverzí, cykly $(1,7,9,3),(2,4,8,6),(5)$, 6 transpozic, znaménko $+1$,

$p \circ q = (7,4,1,8,5,2,9,6,3)$, $(p \circ q)^{-1} = (3,6,9,2,5,8,1,4,6)$
18 inverzí, cykly $(1,7,9,3),(2,4,8,6),(5)$, 6 transpozic, znaménko $+1$,

Všimněte si, že $q \circ p = p \circ q$.

Příklad 8: Kolik existuje permutací množiny $\{1,\ldots,n\}$ s právě jedním cyklem?

Výsledek: Permutací s jedním cyklem je $(n-1)!$.