Lineární algebra I - cvičení 3 18.10.2016

Příklad 1: Vyřešte rovnici $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ pro matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -3 \\ 10 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -3 \\ 10 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Rovnice nemá řešení.

Příklad 2: Invertujte diagonální matici $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$.

Výsledek: $\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^{-1} \end{pmatrix}$.

Příklad 3: Invertujte reálnou matici

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Výsledek: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Výsledek: $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 & 0 & 2/5 \\ 2/15 & -2/5 & -1/3 & 8/15 \\ 1/5 & 2/5 & 0 & -1/5 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Výsledek: $\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Výsledek: $\mathbf{D}^{-1}$ *neexistuje, matice je singulární.*

Příklad 4: Určete inverzní matice k následujícím elementárním maticím:

a)

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

což je matice, která vznikne z jednotkové prohozením i. a j. řádku.

Výsledek: $E_{i,j}^{-1} = E_{i,j}$.

b)

$$E_i(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & m & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde m se objevuje pouze v i. sloupci a i. řádku a $m \neq 0$

Výsledek: $(E_i(m))^{-1} = E_i(1/m)$.

c)

$$E_{i,j}(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & m & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde m se objeví pouze v j. řádku a i. sloupci.

Výsledek: $(E_{i,j}(m))^{-1} = E_{i,j}(-m)$.

Příklad 5: Najděte inverzní matici k matici

a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledek: Inverzní matice je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledek: Inverzní matice je

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Příklad 6: Nechť $\mathbf{A}^2$ má inverzi $\mathbf{B}$. Dokažte, že i matice $\mathbf{A}$ je invertovatelná a nalezněte její inverzi.