Lineární algebra I - cvičení 2 11.10.2016

Příklad 1: Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Výsledek: Je-li $a = 1$, pak je řešením soustavy množina $\{(1-p-q-r, p, q, r)^T \mid p, q, r \in \mathbb{R}\}$.
Pro $a = -3$ soustava nemá řešení.
Jinak je řešením vektor $(\frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3})^T$.

Příklad 2: Řešte následující soustavy rovnic Gauss–Jordanovou elimininací:

a)

$$\begin{aligned} x_2 \qquad + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 \qquad - x_3 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

Výsledek: $\mathbf{x} = (1, \frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2})^T + p(1, 0, 1, 0)^T$.

b)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 3 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Výsledek: $\mathbf{x} = (-2, 0, 1, 0)^T + p(2, 1, 0, 0)^T + q(3, 0, -1, 1)^T$

Příklad 3: Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ a $\mathbf{0}$ stejného řádu a reálná čísla α, β platí:

a) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
b) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$
d) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$
e) $\alpha(\beta\mathbf{A}) = \beta(\alpha\mathbf{A})$
f) $\mathbf{A} + (-1)\mathbf{A} = \mathbf{0}$
g) $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$
h) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
i) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$
j) $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = (\alpha + \beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B})$
k) $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
l) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
m) $(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha(\mathbf{A}^T)$

Příklad 4: Pro reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Spočítejte součin $\mathbf{AB}$.

Výsledek: $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Spočítejte součin $\mathbf{BA}$.

Výsledek: $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 3 \\ 9 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Příklad 5: Spočtěte součiny $\mathbf{AB}_i$ a $\mathbf{B}_i\mathbf{A}$, pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jakým úpravám matice $\mathbf{A}$ odpovídají příslušné součiny?

$\mathbf{AB}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ a_{2,1} & 0 \end{pmatrix}$ *odpovídá výběru prvního sloupce.*

$\mathbf{B}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *odpovídá výběru prvního řádku.*

$\mathbf{AB}_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,1} \\ 0 & a_{2,1} \end{pmatrix}$ *vybere první sloupec a umístí jej na místo druhého.*

$\mathbf{B}_2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *vybere druhý řádek a umístí jej na místo prvního.*

$\mathbf{AB}_3 = \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,1} \end{pmatrix}$ *a* $\mathbf{B}_3\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{1,1} & a_{1,2} \end{pmatrix}$*, tedy první součin prohodí sloupce, druhý řádky.*

Obecně násobení matice $\mathbf{A}$ *zleva* $\mathbf{BA}$ *odpovídá řádkovým úpravám matice* $\mathbf{A}$*, zatímco součiny zprava* $\mathbf{AB}$ *odpovídají sloupcovým úpravám.*

Příklad 6: Najděte nenulovou matici $\mathbf{A}$ takovou, že $\mathbf{AA} = \mathbf{0}$.

Výsledek: Například $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. *Jak vypadají všechny takové matice rozměru* 2×2*?*

Příklad 7: Ukažte, že platí:

a) Matice $\mathbf{AA}^T$ je vždy symetrická.

b) Každá matice typu $m \times n$ splňuje $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{AI}_n$.

Příklad 8: Pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

vyřešte maticové rovnice

a) $(\mathbf{A} - \mathbf{D})\mathbf{X}_1 = \mathbf{A}$

$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{X}_2\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D}$

$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -13/15 & 3/5 & -1/3 & 23/15 \\ 3/5 & -4/5 & 0 & 7/5 \\ -1/3 & 1 & -2/3 & 5/3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Příklad 9: Vyřešte rovnici $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ pro matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -3 \\ 10 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -3 \\ 10 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Rovnice nemá řešení.