Lineární algebra I - cvičení 12 10.1.2017

Příklad 1: Buď $v_1, \dots, v_4$ báze prostoru V nad $\mathbb{R}$ a buď $f_1, \dots, f_4$ duální báze. Najděte duální bázi pro bázi

a) $v_1, 2v_2, \frac{1}{2}v_3, v_4$

Výsledek: $f_1, \frac{1}{2}f_2, 2f_3, f_4$

b) $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$

Výsledek: $f_1, f_2 - f_1, f_1 - f_2 + f_3, -f_1 + f_2 - f_3 + f_4$

Příklad 2: Buď A matice lineárního zobrazení $g \colon V \to V$ vzhledem k bázi B. Ukažte, že A^T je matice duálního lineárního zobrazení g^* vzhledem k duální bázi B^*.

Příklad 3: Zjistěte, zda jsou následující vektory afinně nezávislé:

a) v $\mathbb{R}^3$ uvažujeme vektory $x_0 = (1,2,3), x_1 = (2,3,1), x_2 = (1,3,2), x_3 = (2,1,3)$

Výsledek: Ne.

b) v $\mathcal{P}^2$ uvažujeme vektory $p_1 = x^2 + x + 1, p_2 = 2x^2 - 3x$, $p_3 = x + 1$, $p_4 = -x^2 - 2$

Výsledek: Ano.

Příklad 4: Rozhodněte, zda $U = V$ pro

a) $U = (1,0,0) + \operatorname{span}\{(1,2,1),(2,1,0)\}, V = (2,-1,-1) + \operatorname{span}\{(0,3,2),(3,0,-1)\}$.

Výsledek: Jsou stejné.

Příklad 5: Předpokládejme, že množina řešení soustavy $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ je 2-dim afinní podprostor. Co můžeme říct o dimenzi množiny řešení soustavy $\mathbf{A}x = \mathbf{b}'$?

Příklad 6: Nechť U a V jsou vektorové podprostory nějakého vektorového prostoru W a $a, b \in W$. Dokažte:

a) $U + a = U + b$ právě tehdy, když $a - b \in U$.

b) $U + a = V + b$ právě tehdy, když $a - b \in U$ a $U = V$.

Příklad 7: Buď $S = \{a, v_1, \dots, v_n\}$ souřadný systém reálného afinního podprostoru $M = a + V$, označme $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dokažte:

a) Pro každé $u, v \in M$ je $[u - v]_B = [u]_S - [v]_S$.

b) Pro každé $u \in M$ a $v \in V$ je $[u + v]_S = [u]_S + [v]_B$.

Příklad 8: Mějme vektorový prostor V nad $\mathbb{R}$ a v něm podprostor U s bázemi $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ a $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$. Dále uvažujeme dva souřadné systémy $S = \{o, v_1, v_2, v_3\}$ a $S' = \{p, a_1, a_2, a_3\}$ afinního podprostoru A. Platí, že $[o - p]_B = (-1,0,0)$, $[a_1]_B = (1,1,0)$, $[a_2]_B = (0,-1,0)$ a $[a_3]_B = (0,0,-1)$. Popište transformace souřadných systémů od S k S' a od S' k S. Vyjádřete vektor $v_1 + v_2 + v_3 + o$ jako lin. kombinaci vektorů z S'.