Lineární algebra I - cvičení 10 20.12.2016

Příklad 1: O lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je známo, že vektory $(1,2,0)$ a $(2,0,1)$ náleží do $\mathrm{Ker}(f)$ a $f(1,1,1) = (3,6)$.

a) Je f zadáno jednoznačně?

Výsledek: Ano.

b) Určete $\dim(f(\mathbb{R}^3))$.

Výsledek: 1.

c) Najděte matici f vzhledem ke kanonické bázi.

Výsledek: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Příklad 2: Najděte jádro a obraz lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ daného předpisem $f(A) = A + A^T$.

Výsledek: Jádro je tvořeno tzv. antisymetrickými maticemi. Obrazem je prostor symetrických matic.

Příklad 3: Určete obraz prostoru $\mathrm{span}\{\sin x, \cos x\}$ při zobrazení s maticí $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vzhledem k bázím $B_1 = \{\cos x - \sin x, \sin x\}$ a $B_2 = \{\cos x + \sin x, \cos x\}$.

Výsledek: Prostor $\{k \cos x \mid k \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 4: Určete matici přechodu od báze B do báze B' prostoru $\mathcal{P}^2$, je-li $B = \{x^2 + 1, x^2 - 3x + 1, x^2 + x + 3\}$, a $B' = \{x^2 + 2x + 1, 2x^2 + 1, x^2 - x\}$.

Výsledek: $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -5 & -9 \end{pmatrix}$

Příklad 5: Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ zadané $f(2x^2+x-3) = x+1$, $f(x^2+2x+1) = x^2 - 2x$ a $f(-3x^2 - 2x + 4) = -x^2 - x$ a bázi $B = \{2x^2 + x - 2, -2x + 1, x^2 - 1\}$. Najděte ${}_{\mathrm{kan}}[f]_B$.

Výsledek: $\begin{pmatrix} -2 & -10 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 18 & 6 \end{pmatrix}$

Příklad 6: Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení zadané jako

$$f\colon a(1,1,3) + b(2,0,2) + c(2,3,1) \to a(1,1,1) + b(1,2,2,) + c(1,1,0).$$

Najděte matici f^{-1} vzhledem ke kanonické bázi.

Výsledek: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Příklad 7: Buď $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární zobrazení zadané jako

$$f(1,1,1) = (2,1,0), f(2,0,5) = (1,2,3), f(3,1,3) = (0,1,2).$$

a buď V podprostor R^3 s bází $B = \{(5,3,2), (1,1,4)\}$. Najděte matici zobrazení, které vznikne z f omezením definičního oboru na V, vzhledem k bázím B a kan.

Výsledek:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 8: Dokažte, že izomorfismus v $\mathbb{R}^n$ zobrazuje všechny přímky zase na přímky.

Příklad 9: Buď A matice lineárního zobrazení $g\colon V \to V$ vzhledem k bázi B. Ukažte, že A^T je matice duálního lineárního zobrazení g^* vzhledem k duální bázi B^*.