Lineární algebra I - cvičení 1 4.10.2016

Příklad 1: Určete rovnici přímky π v parametrickém tvaru $(x,y) = (x_0,y_0) + t(p,q)$, v obecném tvaru $ax + by + c = 0$, ve úsekovém tvaru $\frac{x}{g} + \frac{y}{h} = 1$ a ve směrnicovém tvaru $y = kx + l$, která prochází body A a B o daných souřadnicích.

Uvažte, zdali jsou koeficienty jednoznačné.

a) $A = (-3, 0)$ a $B = (2, 3)$

Výsledek: Parametrický tvar je $(x,y) = (-3,0) + t(5,3)$, obecný $3x - 5y + 9 = 0$, úsekový $\frac{x}{-3} + \frac{y}{9/5} = 1$, a směrnicový $y = \frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$.

b) $A = (0, 1)$ a $B = (4, 3)$

Výsledek: $(x,y) = (0,1) + t(2,1)$, $x - 2y + 2 = 0$, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.

c) $A = (0, 3)$ a $B = (-2, 3)$

Výsledek: $(x,y) = (0,3) + t(1,0)$, $y - 3 = 0$, úsekový tvar neexistuje (π je rovnoběžná s osou x), $y = 3$.

Příklad 2: Proložte rovinu $ax + by + cz + d = 0$ body

a) $(2, 4, 4)$, $(3, 4, 3)$ a $(3, 1, 6)$

Výsledek: Rovnice roviny je $x + y + z - 10 = 0$.

b) $(5, 4, 7)$, $(4, 5, 5)$ a $(2, 2, 6)$

Výsledek: $-x + y + z - 6 = 0$

Příklad 3: Ukažte, že elementární úpravy:
– záměna dvou rovnic a
– přičtení t násobku j-té rovnice k i-té
se dají provést pomocí elementárních úprav:
– vynásobení i-té rovnice nenulovým číslem t
– přičtení j-té rovnice k i-té

Příklad 4: Doplňte naznačený řetězec elementárních úprav (tak, aby matice stále vycházela celočíselná):

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 7 & . & . & . \\ -8 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 7 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix}$$

Výsledek: například:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 5: Převeďte následující matici $\mathbf{A}$ na odstupňovaný tvar

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

Výsledek: *Kupříkladu*

$$\begin{pmatrix}2&3&4&5\\3&0&2&-3\\7&6&10&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&4&5\\0&-9&-8&-21\\0&-9&-8&-21\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&3&4&5\\0&9&8&21\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-3&13&18\\6&-9&7&10\\2&-3&-3&-4\end{pmatrix}$

Výsledek: $\begin{pmatrix}2&-3&13&18\\6&-9&7&10\\2&-3&-3&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-3&13&18\\0&0&32&44\\0&0&16&22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-3&13&18\\0&0&8&11\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&-1&4&10\\1&0&3&-5\\2&5&2&2\end{pmatrix}$

Výsledek: $\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&-1&4&10\\1&0&3&-5\\2&5&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-5&6&8\\0&-2&4&-6\\0&1&4&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&4&0\\0&0&12&-6\\0&0&26&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&1&4&0\\0&0&2&-1\\0&0&0&21\end{pmatrix}$

d) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\1&8&7&-7\\1&2&3&-1\\1&5&5&-4\end{pmatrix}$

Výsledek: $\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\1&8&7&-7\\1&2&3&-1\\1&5&5&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&9&6&-9\\0&3&2&-3\\0&6&4&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\0&3&2&-3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Příklad 6: Vyřešte následující soustavu lineárních rovnic a proveďte zkoušku:

a)

$$\begin{aligned}3x_1+2x_2+\ x_3&=\ 5\\2x_1+3x_2+\ x_3&=\ 1\\2x_1+\ x_2+3x_3&=11\\5x_1+5x_2+2x_3&=\ 6\end{aligned}$$

Výsledek: $\mathbf{x}=(2,-2,3)^T$.

b)

$$\begin{aligned}-x_1-\ x_2+2x_3\qquad&=1\\2x_1+3x_2-4x_3+3x_4&=1\\x_1+\ x_2-\ x_3+2x_4&=2\\-\ x_2+2x_3+2x_4&=5\end{aligned}$$

Výsledek: $\mathbf{x}=(0,-3,-1,2)^T$.

Příklad 7: Řešte soustavu lineárních rovnic.

a)

$$\begin{array}{rrrrcr}17a&+9b&-9c&+3d&=&-8\\11a&&+2c&&=&-7\\13a&+2b&-c&&=&-9\\7a&+3b&-5c&+d&=&-8\end{array}$$

Výsledek: Řešení soustavy je $a = -1$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 0$.

Příklad 8: Nalezněte alespoň jedno netriviální řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pro následující matici $\mathbf{A}$, pokud takové existuje.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

Výsledek: Soustava má pouze triviální řešení $\mathbf{x} = (0,0,0,0)^T$.

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

Výsledek: $\mathbf{x} = (-1, 1, 0, 1)^T$.

Příklad 9: Popište všechna řešení následující soustavy lineárních rovnic a proveďte zkoušku.

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Výsledek: $\mathbf{x} = (2, 1, 0)^T + p(-1, 0, 1)^T$

b)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Výsledek: $\mathbf{x} = (1, 2, 0, 0)^T + p(-1, 2, 1, 0)^T + q(3, -1, 0, 1)^T$

Příklad 10: Vzhledem k parametru a řešte soustavu rovnic s maticí:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right)$$

Výsledek: Je-li $a = 1$, pak je řešením soustavy množina $\{(1 - p - q - r, p, q, r)^T \mid p, q, r \in \mathbb{R}\}$.
Pro $a = -3$ soustava nemá řešení.
Jinak je řešením vektor $(\frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3})^T$.