Šestá série domácích úkolů

Příklad 1. (Příklad načatý na cvičení) Nechť A je matice nezáporných reálných čísel tvaru $n \times n$ taková, že součet každého řádku i sloupce A je roven jedné. Ukažte, že v A lze najít n kladných prvků, z nichž žádné dva neleží ve stejném řádku ani sloupci.

Příklad 2. Nechť k je přirozené číslo a nechť B je konečná množina bodů v rovině, která má tu vlastnost, že když z B vybereme libovolných $k+1$ bodů, tak mezi vybranými body budou alespoň dva ležet na společné vodorovné nebo svislé přímce. Dokažte, že existuje k přímek $p_1, \dots, p_k$, každá z nich vodorovná nebo svislá, jejichž sjednocení obsahuje všechny body z B. Zdá-li se vám příklad těžký, zkuste tvrzení dokázat aspoň pro nějaké konkrétní hodnoty k.

Příklad 3. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = \{M_i,\, i \in \mathbb{N}\}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů. Obtížnější úloha: ukažte, že pokud $\mathcal{M} = \{M_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ je nekonečný systém množin splňující Hallovu podmínku a navíc každá množina M_i je konečná, tak $\mathcal{M}$ má systém různých reprezentantů.