Šestá série domácích úkolů

Příklad 1. Připomeňme, že *latinský obdélník* tvaru $k \times n$ je matice s k řádky a n sloupci taková, že v každém řádku se každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ vyskytuje právě jednou a v každém sloupci se každé číslo vyskytuje nejvýš jednou. Dokažte, že pro $k < n$ lze do libovolného latinského obdélníku tvaru $k \times n$ přidat nový řádek tak, aby vznikl latinský obdélník tvaru $(k+1) \times n$.

Příklad 2. Mějme systém množin $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Chceme z každé množiny M_i vybrat deset reprezentantů tak, aby žádný prvek nebyl reprezentantem pro více než jednu množinu. Zformulujte a dokažte variantu Hallovy věty, která charakterizuje, kdy je takový výběr možný.

Příklad 3. Nechť k je přirozené číslo a nechť B je konečná množina bodů v rovině, která má tu vlastnost, že když z B vybereme libovolných $k+1$ bodů, tak mezi vybranými body budou alespoň dva ležet na společné vodorovné nebo svislé přímce. Dokažte, že existuje k přímek $p_1, \ldots, p_k$, každá z nich vodorovná nebo svislá, jejichž sjednocení obsahuje všechny body z B. Zdá-li se vám příklad těžký, zkuste tvrzení dokázat aspoň pro nějaké konkrétní hodnoty k.

Příklad 4. Najděte nekonečný systém množin $\mathcal{M} = \{M_i,\, i \in \mathbb{N}\}$, který splňuje Hallovu podmínku (tj. pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje sjednocení libovolné k-tice množin z $\mathcal{M}$ aspoň k prvků), ale nemá systém různých reprezentantů. Obtížnější varianta: ukažte, že pokud $\mathcal{M} = \{M_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ je nekonečný systém množin splňující Hallovu podmínku a navíc každá množina M_i je konečná, tak $\mathcal{M}$ má systém různých reprezentantů.