Druhá série domácích úkolů

Příklad 1. Kolik koster má úplný bipartitní graf $K_{3,3}$? Obecněji, kolik koster má úplný bipartitní graf $K_{m,n}$? A kolik koster má graf vzniklý z úplného bipartitního grafu odstraněním jedné hrany?

Příklad 2. (Dokončení příkladu načatého na cvičení) Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf, jehož hrany mají přiřazené váhy, přičemž žádné dvě hrany nemají stejnou váhu. Připomeňme některé definice ze cvičení: řekneme, že hrana e je *těžká*, pokud v G existuje kružnice C obsahující hranu e taková, že e je nejtěžší ze všech hran C. Řekneme, že e je *lehká*, pokud existuje množina vrcholů $R \subseteq V$ taková, že e má právě jeden konec v R a je nejlehčí ze všech hran majících právě jeden konec v R.

Nechť T je minimální kostra G. Ukažte, že pro libovolnou hranu $e \in E$ jsou následující výroky ekvivalentní:

1. e je lehká,
2. e není těžká,
3. e patří do T.

(Na cvičení jsme dokázali, že když e patří do T, tak e není těžká, a že když e je lehká, tak e není těžká. To už znovu dokazovat nemusíte.)

Příklad 3. Mějme graf $G = (V, E)$. Řekneme, že dva vrcholy u a v jsou *dvojníci*, pokud každý vrchol grafu G sousedí buď s oběma vrcholy u a v, nebo s žádným z nich (z toho mimo jiné vyplývá, že když u a v jsou dvojníci, tak u nemůže sousedit s v). Dokažte, že když graf G obsahuje dva vrcholy stupně 2, které jsou navíc dvojníci, tak G má sudý počet koster. Zdá-li se vám to snadné, dokažte obecnější verzi: když G obsahuje dva dvojníky stupně d, tak počet koster G je násobek d. Případně dokažte ještě obecnější verzi: když G obsahuje k vrcholů stupně d, z nichž každé dva jsou dvojníci, tak počet koster G je násobek d^{k-1}.