Druhá sada domácích úkolů

za každý správně vyřešený příklad získáte dva body

Příklad 1. Dokažte, že $\sqrt{3}$ není racionální číslo.

Příklad 2. Dokažte, že rovnice $x^3 + x + 1 = 0$ nemá racionální řešení.

Příklad 3. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^3 + 5n$ násobek 3.

Příklad 4. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ jsou následující dva výroky ekvivalentní:

(A) Číslo n je násobek tří.

(B) Pro libovolné číslo x, které je násobkem patnácti platí, že $n - x$ je násobek tří.

Příklad 5. Dokažte, že pro libovolné číslo $n \in \mathbb{N}$ platí, že n je sudé, právě když $2^n - 1$ je násobek tří.

Příklad 6. Definujme posloupnost čísel $a_0, a_1, \ldots$ následovně: $a_0 = 1$, $a_1 = 5$ a pro $n \geq 2$ platí $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$. Dokažte, že pro $n \geq 0$ platí $a_n = 5^n$.

Příklad 7. V rovině je nakresleno n přímek, žádné dvě z nich nejsou rovnoběžné a žádné tři z nich se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že tyto přímky dělí rovinu na $1 + \binom{n+1}{2}$ oblastí.

Příklad 8. Nechť F_n označuje n-té Fibonacciho číslo. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1.$$

Příklad 9. Nechť F_n označuje n-té Fibonacciho číslo. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$.