Domácí úkol z matematické analýzy 2

Termín odevzdání: neděle 18. března

1. Spočítejte následující primitivní funkce.

$\boxed{1}$ (a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

$\boxed{1}$ (b) $\int t\sqrt{1-t}\,dt$

$\boxed{1}$ (c) $\int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx$, kde $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\boxed{1}$ (d) $\int (\ln x)^n\,dx$, kde $n \in \mathbb{N}$

$\boxed{2}$ 2. Symbolem $F^{(k)}$ označme k-násobnou primitivní funkci k funkci f, tj. $F^{(1)}$ je primitivní funkce k f, a pro $k > 1$ je $F^{(k)}$ primitivní funkce k $F^{(k-1)}$. Ukažte, že když umíme spočítat $F^{(k)}$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, tak můžeme spočítat i $\int x^n f(x)\,dx$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Spočítejte $\int x^{100}\sin x\,dx$.

$\boxed{2}$ 3. Vysvětlete, proč je následující úvaha chybná.

Spočítejme primitivní funkci k funkci tangens. Využijme toho, že

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \frac{1}{\cos x},$$

a použijme metodu per partes. Snadno spočítáme, že $\int \sin x\,dx = -\cos x$ *a* $(\frac{1}{\cos x})' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$. *Dosazením do vzorečku metody per partes dostaneme*

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg} x\,dx &= \int \sin x \frac{1}{\cos x}\,dx\\ &= -\cos x\frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x)\frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx\\ &= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\ &= -1 + \int \operatorname{tg} x\,dx.\end{aligned}$$

Odečtením $\int \operatorname{tg} x\,dx$ *od poslední rovnosti dokážeme, že* $0 = -1$.