

Lineární algebra II, pátá série domácích úkolů
Termín odevzdání: 24. 5.

Příklad 1. (3 body z každou maticí) Spočítejte Choleského rozklad následujících matic.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 5 \\ -6 & 19 & -12 \\ 5 & -12 & \frac{45}{2} \end{pmatrix}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 0 & 4 \\ -8 & 18 & -6 & -8 \\ 0 & -6 & 18.5 & 0.5 \\ 4 & -8 & 0.5 & 5.5 \end{pmatrix}$$

Příklad 2. (3 body) Pro jakou hodnotu reálného čísla x je následující matice M pozitivně definitní? A jak v tom případě vypadá její Choleského rozklad? (Jak víme, matice je pozitivně definitní právě tehdy, když pro ni existuje Choleského rozklad $M = LL^T$, v němž L je dolní trojúhelníková matice s kladnou diagonálou.)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 3. (3 body) Následující slovní úlohu přeformulujte jako úlohu lineárního programování (stačí napsat formulaci, nemusíte hledat řešení): mlékárenská firma provozuje tři mlékárny (říkejme jim M_1 , M_2 a M_3), pro něž potřebuje zajistit dodávku mléka. Mléko lze vykoupit od dvou zemědělských statků S_1 a S_2 . Každá ze tří mlékáren potřebuje denně vykoupit celkem 1000 litrů mléka. Každý statek je schopen denně vyprodukovat maximálně 2000 litrů mléka. Statek S_1 nabízí mléko k odprodeji za cenu 5 Kč za litr a statek S_2 za cenu 6 Kč z litr. Náklady na dopravu mléka (které nejsou zahrnuty ve výkupní ceně) jsou následující: ze statku S_1 do kterékoliv mlékárny lze dopravit mléko za cenu 3 Kč za litr. Ze statku S_2 do mlékárny M_1 to stojí 1 Kč za litr, do mlékárny M_2 2 Kč za litr a do mlékárny M_3 je to 3 Kč za litr. Kolik mají jednotlivé mlékárny odebírat od jednotlivých statků, aby plně pokryly svou výrobu a aby celkové náklady pro mlékárenskou společnost byly co nejmenší?