

Vyřešené příklady dodejte nejpozději do začátku cvičení v pátek 6. dubna 2007.

- 3 1. Dokažte, že pro každé dost velké n platí, že v libovolné matici s n řádky a n sloupci, jejíž složky jsou přirozená čísla od jedné do deseti, lze zvolit deset řádků a deset sloupců tak, že všechny průsečíky zvolených řádků se zvolenými sloupci obsahují stejné číslo.
- 3 2. Dokažte, že pro každé dost velké n platí, že v každé množině n otevřených intervalů $\{(x_i, y_i) \subseteq \mathbb{R}; i = 1, \dots, n\}$ lze najít buď tisíc intervalů, z nichž každé dva jsou disjunktní, nebo tisíc intervalů, jejichž společný průnik je neprázdný.
3. V následujících příkladech symbol K_n označuje úplný graf na množině vrcholů $\{1, 2, \dots, n\}$. Pojem *2-obarvení* K_n označuje obarvení hran K_n dvěma barvami. Podgraf K_n je *monochromatický*, pokud všechny jeho hrany mají stejnou barvu.
- Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.
- 1 (a) Existuje n takové, že libovolné 2-obarvení K_n obsahuje monochromatický úplný podgraf na deseti vrcholech, který obsahuje vrchol číslo 1.
- 1 (b) Existuje n takové, že libovolné 2-obarvení K_n obsahuje monochromatický úplný podgraf na deseti vrcholech, jehož všechny vrcholy jsou lichá čísla.
- 2 (c) Existuje n takové, že pro libovolných deset různých 2-obarvení K_n lze v grafu K_n najít úplný podgraf na deseti vrcholech, který je monochromatický ve všech těchto deseti 2-obarveních.
- 2 (d) Existuje n takové, že v libovolném 2-obarvení K_n lze najít monochromatický úplný podgraf na deseti vrcholech, který má mezi svými vrcholy alespoň jedno liché a alespoň jedno sudé číslo.
- 2 (e) Existuje n takové, že každé 2-barvení K_n obsahuje dva monochromatické podgrafy G_1 a G_2 na deseti vrcholech (které nemusí mít nutně oba stejnou barvu), pro které platí, že když G_1 obsahuje vrchol i , tak G_2 obsahuje vrchol $i + 1$.
- 3 (f) Existuje n takové, že každé 2-obarvení K_n obsahuje monochromatický úplný podgraf na deseti vrcholech, jehož vrcholy tvoří aritmetickou posloupnost, tj. vrcholy mají tvar $i, i + d, i + 2d, \dots, i + 9d$ pro nějaké i a $d \geq 1$.