Bodované domácí úkoly — čtvrtá série

Vyřešené příklady dodejte do cvičení 23. 3.

1. Nechť $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je posloupnost s vytvořující funkcí $f(x)$. Vyjádřete vytvořující funkci pro následující posloupnosti:

$\boxed{1}$ (a) $(a_0, a_0, -a_0, a_1, a_1, -a_1, a_2, a_2, -a_2, \dots, a_i, a_i, -a_i, \dots)$

$\boxed{1}$ (b) $(a_0 + a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4, \dots)$

$\boxed{3}$ (c) $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, ia_i, \dots)$

$\boxed{2}$ (d) $(a_0, 2a_1, 4a_2, 8a_3, \dots, 2^i a_i, \dots)$

$\boxed{5}$ (e) Posloupnost $(b_0, b_1, b_2, \dots)$, definovanou následujícím způsobem:

$$b_i = \begin{cases} a_i \text{ pokud } i \text{ je násobek } 4 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

Nápověda: vyjádřete hledanou funkci jako kombinaci členů tvaru $f(\alpha x)$, kde α jsou vhodná komplexní čísla.

2. Nechť a_n označuje počet způsobů jak vyjádřit číslo n jako součet libovolného počtu lichých kladných čísel, nechť b_n označuje počet způsobů jak vyjádřit n jako součet libovolného počtu celých čísel větších než 1. Tvrdíme, že pro každé $n \geq 1$ platí $a_n = b_{n+1}$.

$\boxed{2}$ (a) Dokažte tvrzení pomocí vytvořujících funkcí.

$\boxed{5}$ (b) Dokažte tvrzení pomocí explicitní bijekce.