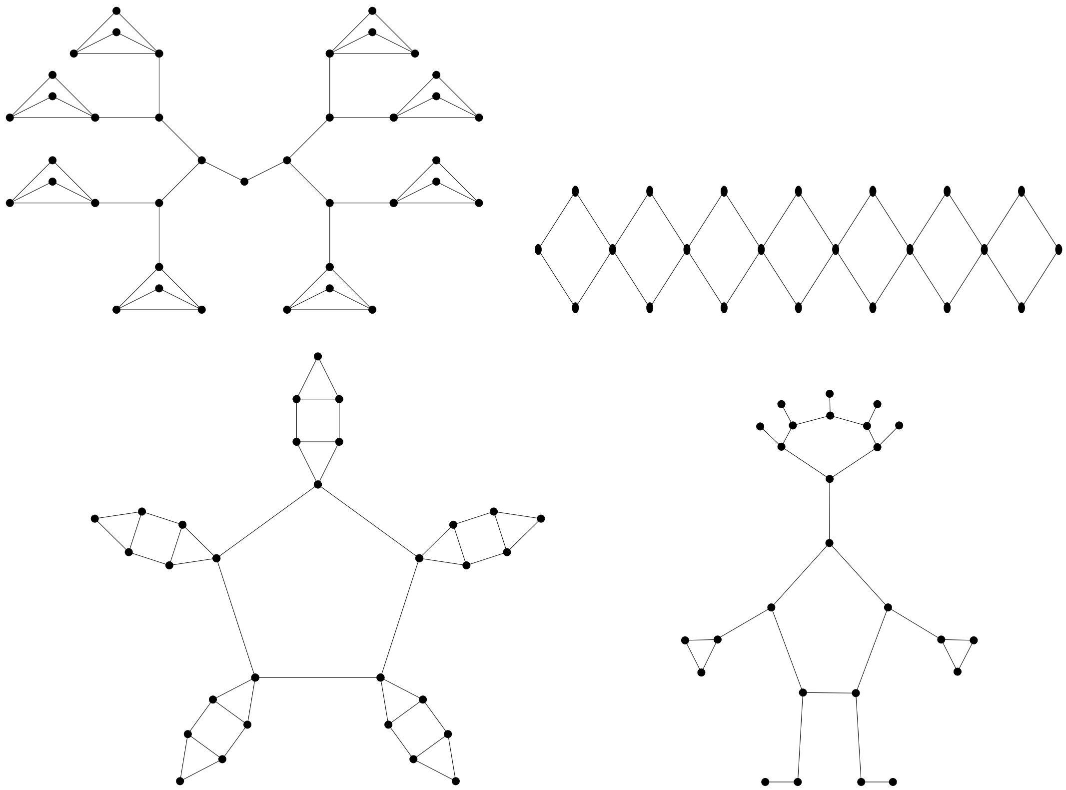
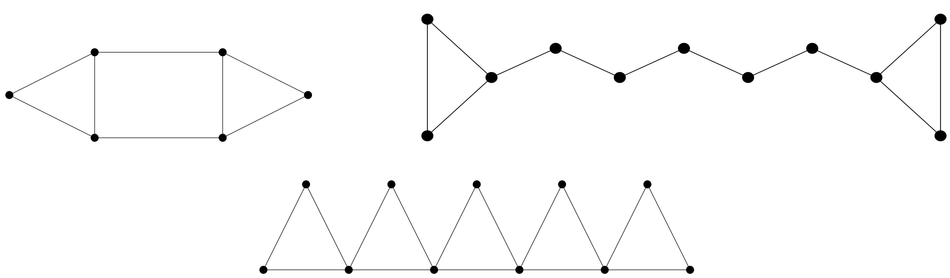
Bodované domácí úkoly — 12. série

Tato série nemá žádný časový limit. Své odpovědi zdůvodněte, nestačí jenom napsat správný výsledek.

$\boxed{4}$ 1. Spočítejte počet koster následujících čtyř grafů (1 bod za každý graf).



$\boxed{3}$ 2. Určete chromatický polynom následujících tří grafů (1 bod za každý graf).



3.

$\boxed{2}$ (a) V restauraci u kulatého stolu sedí $n \geq 2$ hostů. Restaurace nabízí celkem k druhů jídel. Každý host si chce objednat jedno z těchto k jídel tak, aby žádní dva hosté sedící vedle sebe neměli stejný druh jídla. Ukažte, že existuje přesně $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ způsobů, jak si mohou objednat.

$\boxed{1}$ (b) Dokažte, že pro každé $n, k \geq 0$ je číslo $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$ násobek k.

4.

$\boxed{2}$ (a) Dokažte, že všechny stromy na n vrcholech mají stejný chromatický polynom. Který je to polynom?

$\boxed{3}$ (b) Dokažte, že žádný graf na n vrcholech, který není strom, tento chromatický polynom nemá.

$\boxed{5}$ 5. V následujících mocninných řadách najděte hodnotu koeficientu u příslušné mocniny x. Upravte výsledek tak, aby neobsahoval binomické koeficienty s neceločíselnými členy (1 bod za každý koeficient).

(a) koeficient x^{20} v $(x - x^2)\sqrt{1-x}$

(b) koeficient x^{40} v $(\sum_{j=4}^{18} x_i)^4$

(c) koeficient x^{26} v $\frac{x^2}{2-x^4}$

(d) koeficient x^{26} v $\frac{x^2}{(2-x)^4}$

(e) koeficient x^{26} v $\frac{x^2}{(2-x^2)^2}$

$\boxed{4}$ 6. Napište vytvořující funkci pro následující posloupnosti (1 bod za každou posloupnost).

(a) $1, -1, 1, -2, 1, -4, 1, -8, \dots, 1, -2^i, 1, \dots$

(b) $3, 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, 3, 2, 1, \dots$

(c) $0, 1, 2, -3, 4, 5, -6, 7, 8, -9, \dots$

(d) $\binom{0}{3}, -\binom{1}{3}, \binom{2}{3}, -\binom{3}{3}, \binom{4}{3}, -\binom{5}{3}, \binom{6}{3}, \dots, (-1)^i\binom{i}{3}, \dots$

$\boxed{2}$ 7. Nechť a_n je posloupnost čísel taková, že $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ a každý další člen je aritmetickým průměrem předchozích dvou členů. Najděte limitu této posloupnosti.

$\boxed{4}$ 8. Najděte vytvořující funkce pro posloupnosti definované následujícími rekurencemi (1 bod za každou vytvořující funkci), najděte explicitní vzorec pro n-tý člen každé posloupnosti (1 bod za každou posloupnost).

(a) $a_0 = 1$ a pro $n \geq 1$ platí $a_n = 3a_{n-1} + 1$.

(b) $a_0 = 0$ a pro $n \geq 1$ platí $a_n = 2a_{n-1} + n$.

$\boxed{3}$ 9. Nechť a_n označuje počet způsobů, jak sestavit obnos n korun, když máme k dispozici korunové, dvoukorunové a desetikorunové mince. Předpokládejme, že nezáleží na pořadí, v jakém mince použijeme, ale jenom na tom, kolik mincí dané hodnoty jsme použili. Najděte vytvořující funkci pro posloupnost a_n (1 bod). Řešte analogickou úlohu v situaci, kdy máme k dispozici nejvýš sedm korunových mincí a nejvýš osm dvoukorunových micí (1 bod). Řešte analogickou úlohu v situaci, kdy máme neomezený počet mincí a chceme použít aspoň pět dvoukorunových mincí (1 bod).

10. Nechť G je graf na n vrcholech, nechť $\overline{G}$ označuje doplněk grafu G, nechť $\chi(G)$ označuje barevnost G.

$\boxed{2}$ (a) Dokažte (například indukcí), že pro každý graf G na n vrcholech platí $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$

$\boxed{2}$ (b) Ukažte, že pro každé n a pro každé $k \leq n$ existuje graf G splňující $\chi(G) = k$ a $\chi(\overline{G}) = n - k + 1$.

11. U následujících výroků rozhodněte, jestli jsou pravdivé.

$\boxed{2}$ (a) Existuje n takové, že když obarvíme hrany úplného grafu K_n černou a bílou barvou tak, že počet hran obarvených bíle je větší nebo roven počtu hran obarvených černě, tak výsledný graf bude obsahovat úplný podgraf na deseti vrcholech, jehož všechny hrany jsou obarveny bíle.

$\boxed{2}$ (b) Existuje n takové, že když obarvíme hrany libovolného grafu G na n vrcholech dvěma barvami, tak G bude obsahovat indukovaný podgraf na deseti vrcholech, jehož všechny hrany jsou obarveny stejnou barvou.

$\boxed{2}$ 12. Najděte stupeň hranové a vrcholové souvislosti úplného bipartitního grafu $K_{m,n}$.

$\boxed{2+2}$ 13. Ukažte, že pro každé k existuje vrcholově k-souvislý graf, který má hamiltonovskou cestu, ale ne hamiltonovskou kružnici (2 body). Pokud dokonce najdete k-souvislý graf, který má hamiltonovskou cestu spojující libovolnou dvojici nesousedních vrcholů, a přesto nemá hamiltonovskou kružnici, dostanete dva body navíc.