Bodované domácí úkoly — desátá série

Vyřešené příklady dodejte do pátku 4. 5.

$\boxed{3}$ 1. Nechť A je nezáporná reálná matice s n řádky a n sloupci, pro kterou platí, že součet čísel v libovolném řádku je roven jedné a součet čísel v libovolném sloupci je také roven jedné. Dokažte, že v této matici lze najít n nenulových čísel, z nichž žádné dvě neleží ani ve stejném řádku ani ve stejném sloupci.

$\boxed{4}$ 2. Řekneme, že množina bodů v rovině je *nezávislá*, pokud žádné dva z těchto bodů neleží na stejné vodorovné nebo svislé přímce. Řekneme, že množina přímek P tvoří *pokrytí* množiny bodů B, pokud každý bod z B leží na nějaké přímce z P.

Nechť B je libovolná konečná množina bodů v rovině. Dokažte, že nejmenší možný počet vodorovných a svislých přímek nutný k pokrytí B je přesně roven velikosti největší nezávislé podmnožiny B.

$\boxed{2}$ 3. Dokažte, že množina přímek konečné projektivní roviny má systém různých reprezentantů. (Připomeňme, že přímka v projektivní rovině je definována jako množina bodů.)

$\boxed{2}$ 4. (a) Nechť G je graf na n vrcholech, pro nějž platí, že libovolný podgraf G na k vrcholech má nejvýše k hran. Dokažte, že hrany G lze zorientovat tak, že z každého vrcholu vychází nejvýše jedna hrana.

$\boxed{2}$ (b) Nechť G je graf na n vrcholech, pro nějž platí, že libovolný podgraf G na k vrcholech má nejvýše $10k$ hran. Dokažte, že hrany G lze zorientovat tak, že z každého vrcholu vychází nejvýše deset hran.

$\boxed{2}$ (c) Dokažte, že hrany libovolného rovinného grafu lze zorientovat tak, že z každého vrcholu vychází nejvýše tři hrany.

$\boxed{3}$ 5. Nechť $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ je systém množin, pro nějž platí následující upravená Hallova podmínka:

$$\forall J \subseteq \{1, \ldots, n\}\colon\ |\bigcup_{i\in J} M_i| \geq |J| - 100.$$

Dokažte, že v $\mathcal{M}$ lze najít podsystém s aspoň $n-100$ množinami, který má systém různých reprezentantů.

6. Nechť $\mathcal{M} = \{M_i;\ i \in \mathbb{N}\} = \{M_1, M_2, \ldots\}$ je systém nekonečně mnoha množin. Řekneme, že $\mathcal{M}$ splní Hallovu podmínku, pokud pro libovolnou konečnou množinu indexů $J \subseteq \mathbb{N}$ platí

$$|\bigcup_{i\in J} M_i| \geq |J|.$$

$\boxed{3}$ (a) Najděte nekonečný množinový systém, který splní Hallovu podmínku, ale nemá systém různých reprezentantů.

$\boxed{4}$ (b) Dokažte, že pokud $\mathcal{M} = \{M_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ splní Hallovu podmínku a navíc pro každé $i \in \mathbb{N}$ je množina M_i konečná, pak $\mathcal{M}$ má systém různých reprezentantů.