Příklady řešené na cvičení 25. 5. 2007

- Jaká je vrcholová a hranová souvislost úplného bipartitního grafu?
- Nechť G je graf na množině vrcholů $\{1, 2, \ldots, 2k\}$, kde dva vrcholy i, j jsou spojené hranou právě když $|i - j| \neq k$. Spočítejte hranovou souvislost G.
- Nechť G je graf na n vrcholech, v němž každý vrchol má stupeň d, kde $d > n/2$. Dokažte, že G má hranovou souvislost přesně d. Platí podobné tvrzení i pro vrcholovou souvislost?
- Dokažte, že každý rovinný graf se dá nakreslit tak, že každá hrana je úsečka. Důkaz, který jsem předváděl na cvičení, byl děravý, správný důkaz by sledoval například takovouto kostru:
    1. Budeme indukcí podle počtu vrcholů dokazovat, že každé rovinné nakreslení se dá překreslit na úsečkové nakreslení, přičemž se zachová počet a pořadí vrcholů každé stěny, navíc vnější stěna zůstane vnější. Snadno nahlédneme, že toto tvrzení platí pro $n \leq 3$.
    2. Indukční krok: předpokládejme, že to tvrzení platí pro grafy s n vrcholy, berme nakreslení G s $n + 1$ vrcholy. Bez újmy na obecnosti G je triangulace.
    3. Víme, že G obsahuje nějaký vrchol v stupně menšího než 6. Předpokládejme, že v má stupeň 5 (ostatní případy jsou jednodušší). Odebereme vrchol v, nakreslení $G - v$ má na místě vrcholu v stěnu délky 5 (protože G byla triangulace), označme vrcholy této stěny $w_1, \ldots, w_5$. Rozmyslíme si, že do této stěny můžeme přidat dvě diagonální hrany e, f, aniž by vznikly násobné hrany. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že e a f se sbíhají ve vrcholu w_1. Dostali jsme nakreslení nějaké triangulace na n vrcholech. Dle indukčního předpokladu můžeme tuto triangulaci překreslit do úsečkového nakreslení.
    4. Rozmyslíme, že v tomto úsečkovém nakreslení najdeme poblíž w_1 bod, z nějž lze vést úsečky do všech bodů $w_1, \ldots, w_5$, aniž bychom překřížili hrany G. Do tohoto bodu umístíme v, smažeme e, f a dokončíme nakreslení G.