

Bodované domácí úkoly — 5. série

Číslo ve čtverečku u každého příkladu označuje maximální počet bodů, které za ten příklad můžete získat. Každou vaši odpověď musíte zdůvodnit.

- 1 1. Kolik existuje navzájem neizomorfních stromů, které mají pět listů a nemají žádný vrchol stupně dva?
- 2 2. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na šesti vrcholech, jejichž všechny vrcholy mají stupeň tři?
3. Graf G , který je izomorfní svému doplňku \overline{G} se nazývá *samodoplňkový*.
 - 1 (a) Najděte všechny samodoplňkové kružnice (dokažte, že žádné jiné neexistují).
 - 3 (b) Necht' G je samodoplňkový graf na n vrcholech. Dokažte, že buď n nebo $n - 1$ je dělitelné čtyřmi. (Nápověda: kolik má samodoplňkový graf hran?)
 - 3+3 (c) Najděte samodoplňkový graf na osmi vrcholech (3 body). Ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje samodoplňkový graf na $4k$ vrcholech (další 3 body).
 - 3+3 (d) Najděte samodoplňkový graf na devíti vrcholech (3 body). Ukažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje samodoplňkový graf na $4k + 1$ vrcholech (další 3 body).
- 4 4. Existuje graf, který má právě dvě kostry?
- 2 5. Najděte rovinný graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň 5.
- 4 6. Necht' G je rovinný graf, který má aspoň 11 vrcholů. Dokažte, že doplněk G není rovinný.
7. Rovinný graf se nazývá *triangulace*, pokud v některém jeho nakreslení je každá stěna ohraničena kružnicí délky tři.
 - 2 (a) Dokažte, že každý rovinný graf G s alespoň třemi vrcholy je podgrafem nějaké triangulace H , pro kterou platí $V(H) = V(G)$.
 - 4 (b) Dokažte, že každý rovinný graf je indukovaným podgrafem nějaké triangulace.
8. V rovině je nakresleno n přímek, které dělí rovinu na oblasti. Necht' G je následující graf: vrcholy G jsou oblasti vymezené přímkami (včetně neomezených oblastí). Dvě oblasti jsou spojeny hranou G , pokud spolu sousedí, tj. pokud jejich hranice mají společný úsek kladné délky (dvě oblasti, které se dotýkají jen v jednom bodě nepokládáme za sousední).
 - 2 (a) Dokažte, že G je bipartitní.
 - 4 (b) Dokažte, že G je podgraf n -dimenzionální hyperkrychle H_n (byla definována na cvičení 2. prosince).
- 2 9. Rovinný graf $G = (V, E)$ má 30 hran. Je dáno rovinné nakreslení grafu G , v němž každá stěna je trojúhelník, tj. každá stěna sousedí s právě třemi hranami. Kolik má G stěn? Kolik má vrcholů?