Bodované domácí úkoly — 1. série

Číslo ve čtverečku u každého příkladu označuje maximální počet bodů, které za ten příklad můžete získat. Každou vaši odpoveď musíte zdůvodnit.

$\boxed{1}$ 1. Dokažte, pro $n \geq 2$:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}.$$

$\boxed{2}$ 2. Připomeňme, že posloupnost Fibonacciho čísel je definována pomocí vztahů $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Dokažte, pro $n \geq 0$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

(Ujistěte se, že jste ten vzorec opravdu dokázali pro všechna nezáporná n.)

$\boxed{2+2}$ 3. Dokažte pro $n \geq 1$ následující nerovnosti (2 body za každou nerovnost):

$$2\sqrt{n+1} - 2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

$\boxed{2}$ 4. V rovině je n přímek. Žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že tyto přímky dělí rovinu na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ částí.

$\boxed{1}$ 5. Nechť R je uspořádání na množině X, nechť X' je podmnožina X. Definujme relaci R' na X předpisem $R' = R \cap (X' \times X')$. Je R' uspořádání na X'?

$\boxed{1}$ 6. Nechť $\triangleleft$ označuje tranzitivní a reflexivní relaci na nějaké možině X. Definujme na množině X relaci $\equiv$ předpisem $x \equiv y$ právě když $x \triangleleft y$ a zároveň $y \triangleleft x$. Dokažte, že $\equiv$ je ekvivalence na množině X.

7. Nechť $\sim_X$ je ekvivalence na množině X, nechť $\sim_Y$ je ekvivalence na množině Y. Rozhodněte, jestli relace $\equiv$ na množině $X \times Y$ je ekvivalence, a pokud ano, popište, jak vypadají její třídy. Relace $\equiv$ je definována následovně:

$\boxed{1}$ (a) Pro $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$ máme $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2)$ právě když $(x_1 \sim_X x_2)$ a zároveň $(y_1 \sim_Y y_2)$.

$\boxed{1}$ (b) Pro $x_1, x_2 \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$ máme $(x_1, y_1) \equiv (x_2, y_2)$ právě když $(x_1 \sim_X x_2) \vee (y_1 \sim_Y y_2)$.

8. Které z následujících relací jsou uspořádání?

$\boxed{1}$ (a) R je relace na $\mathbb{N}$, $(x, y) \in R$ právě když y je násobek x.

$\boxed{1}$ (b) S je relace na množině funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f, g) \in S$ právě když $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{1}$ (c) T je relace na množině funkcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f, g) \in T$ právě když $f(x) \leq g(x)$ pro alespoň jedno $x \in \mathbb{R}$.