Příklady ze 7. 10. 2005

- Nechť A, B, C jsou libovolné množiny. Najděte všechny inkluze, které platí mezi následujícími množinami:
  (a) $A \setminus B$, $(A \cup C) \setminus (B \cup C)$, $A \setminus (B \cap C)$, $A \setminus (B \cup C)$, $(A \cup C) \setminus B$, $(A \setminus B) \setminus C$
  (b) $2^{A \cup B}$, $2^A \cup 2^B$
  (c) $2^{A \cap B}$, $2^A \cap 2^B$
- Dokažte indukcí:
  (a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
  (b) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$
  (c) $\forall n \geq 2\colon \displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n}$
  (d) $\forall n \geq 2\colon \displaystyle\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$
- *Fibonacciho čísla* jsou posloupnost čísel $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$ definovaná následujícím způsobem: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a pro $n \geq 2$ platí $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. Dokažte následující vztahy:
  (a) $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\colon \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (F_i)^2 = F_n F_{n+1}$
  (b) $\forall n \in \mathbb{N}\colon F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$