

Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
9. 9. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvrzení používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.

- (5 bodů) Definujte pojem *hromadný bod* a pojem *limes superior* posloupnosti čísel.
- (10 bodů) Necht' $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Předpokládejme, že každé kladné reálné číslo je hromadným bodem posloupnosti (a_n) . Dokažte, že potom i 0 je hromadným bodem (a_n) . (O tom, zda má (a_n) i záporné hromadné body zde nic nepředpokládáme.)
- (10 bodů) Pro reálnou konstantu $c > 0$ uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}.$$

Zformulujte a dokažte tvrzení z přednášky, které charakterizuje, pro které hodnoty $c > 0$ je tato řada konvergentní.

- (10 bodů) Zformulujte a dokažte Darbouxovu větu o nabývání mezihodnot.
- (10 bodů) Necht' $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce diferencovatelná na \mathbb{R} , která pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňuje $f'(x) > \frac{1}{100}$. Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.
- (10 bodů) Necht' f je funkce, která je newtonovsky integrovatelná na intervalu $(0, 1)$ a splňuje $(N) \int_0^1 f(x) dx = 0$. Dokažte, že existuje hodnota $x \in (0, 1)$, pro niž platí $f(x) = 0$.
- (5 bodů) Uveďte příklad funkce $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, která je na intervalu $[0, 1]$ riemannovsky integrovatelná, ale není na $(0, 1)$ newtonovsky integrovatelná. Zdůvodněte, proč má vaše funkce požadované vlastnosti.
- (5 bodů) Uvažujme křivku tvořící graf funkce $f(x) = x^{3/2}$ definované na intervalu $[0, 1]$. Určete, jakou délku má tato křivka.
- (15 bodů) Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)$: určete definiční obor, obor hodnot, maximální intervaly monotonie, lokální i globální extrémy a maximální intervaly konvexity a konkávnosti. Na základě těchto poznatků načrtněte graf funkce.