

Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
22. 6. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvzení používáte. Všechna ostatní tvzení dokažte.

- (5 bodů) Napište, jak je definován součet řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, kde (a_n) je nějaká reálná posloupnost.
- (10 bodů) Nechtě $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je reálná posloupnost a nechtě $H \subseteq \mathbb{R}^*$ je množina jejích hromadných bodů. Dokažte, že H má v \mathbb{R}^* největší prvek.
- (10 bodů) Nechtě $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pro následující dva výroky rozhodněte, jestli některý z nich implikuje ten druhý. Pro každou ze dvou možných implikací najděte buď důkaz, nebo protipříklad.
 - Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není shora omezená.
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.
- (5 bodů) Zformulujte větu o limitě složené funkce. Nemusíte tu větu dokazovat.
- (10 bodů) Definujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ následovně:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Rozhodněte, zda je tato funkce spojitá v bodě $x = 0$ a zda má v tomto bodě derivaci. Má-li v nule derivaci, určete její hodnotu.

- (10 bodů) Nechtě f je funkce diferencovatelná na \mathbb{R} . Předpokládejme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) < 1$. Dokažte, že existuje nejvýš jedno $c \in \mathbb{R}$ splňující $f(c) = c$.
- (15 bodů) Označme O oblast roviny ohraničenou zesponu osou x a shora grafem funkce $f(x) = 1 - x^2$ na intervalu $[-1, 1]$. Chceme najít obdélník s vodorovnými a svislými stranami obsažený v oblasti O , který má co největší obsah. Jaké bude mít tento obdélník rozměry a jak velkou část plochy oblasti O bude pokrývat?
- (10 bodů) Nechtě funkce $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je na intervalu $[0, 1]$ nezáporná a spojitá. Předpokládejme, že rotační těleso vzniklé otáčením plochy pod grafem funkce f na intervalu $[0, 1]$ kolem osy x má objem 1. Na intervalu $[0, 3]$ definujme funkci g předpisem $g(x) = 4f(\frac{x}{3})$. Lze z těchto informací odvodit objem tělesa vzniklého otáčením plochy pod grafem funkce g na intervalu $[0, 3]$ kolem osy x ? Pokud ano, jaký ten objem bude?
- (5 bodů) Zformulujte integrální kritérium pro konvergenci řad. Nemusíte ho dokazovat.