Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

19. 6. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvrzení používáte. Všechna ostatní tvrzení dokažte.

1. *(5 bodů)* Definujte pojem *supremum* množiny $M \subseteq \mathbb{R}$.
2. *(10 bodů)* Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Pro následující dva výroky rozhodněte, jestli některý z nich implikuje ten druhý. Pro každou ze dvou možných implikací najděte buď důkaz, nebo protipříklad.
   (i) Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ není shora omezená.
   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}\colon a_m > a_n$.
3. *(10 bodů)* Nechť $(q_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}$ je posloupnost racionálních čísel, v níž se každé racionální číslo vyskytne aspoň jednou. Dokažte, že každé reálné číslo je hromadným bodem této posloupnosti.
4. *(10 bodů)* Existuje funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je spojitá v právě jednom bodě $\mathbb{R}$? Uveďte příklad takové funkce, nebo dokažte, že neexistuje.
5. *(10 bodů)* Zformulujte a dokažte Rolleovu větu.
6. *(15 bodů)* Mějme funkci $f(x) = |x|(x^2 - 2x)$. Najděte její limity v $\pm\infty$, rozhodněte, zda má derivaci v bodě $x = 0$, najděte lokální a globální extrémy, určete obor hodnot, najděte maximální intervaly, na nichž je f monotónní, a maximální intervaly, na nichž je konvexní či konkávní. Načrtněte její graf.
7. *(5 bodů)* Rozhodněte, pro které hodnoty konstanty $c \in \mathbb{R}$ je řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^c}{n}$ konvergentní. Své rozhodnutí zdůvodněte (a nezapomeňte ověřit předpoklady vět, které případně použijete).
8. *(5 bodů)* Zformulujte "druhou základní větu analýzy" o souvislosti mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem. Nemusíte ji dokazovat.
9. *(10 bodů)* Nechť funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $[0,1]$ omezená a má tam vlastní spojitou derivaci. Označme $D(f)$ délku křivky tvořící graf této funkce na intervalu $[0,1]$. Definujme funkci $g\colon [0,5] \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = 5f(x/5)$, a označme $D(g)$ délku křivky tvořící graf g na intervalu $[0,5]$. Dokažte, že $D(g) = 5D(f)$.