

Jméno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

18. 6. 2020

Čas: 2 hodiny.

Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály. Tvzení z přednášky můžete používat bez důkazu, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutno uvést, které tvzení používáte. Všechna ostatní tvzení dokažte.

- (5 bodů) Definujte pojem *spočetná množina*.
- (10 bodů) Dokažte, že množina všech reálných čísel není spočetná.
- (10 bodů) Mějme dvě posloupnosti čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$. Předpokládejme, že pro každé $n \geq 0$ platí $a_n > b_n$. Co lze z těchto informací usoudit o vzájemném vztahu A a B ? Dokažte.
- (5 bodů) Najděte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin(n)}{n}$.
- (10 bodů) Nechť f a g jsou dvě funkce, které jsou diferencovatelné na \mathbb{R} . Předpokládejme, že platí $f(0) = g(0)$. Předpokládejme dále, že pro každé $x \in [0, +\infty)$ platí $f'(x) < g'(x)$. Dokažte, že pro každé $x > 0$ platí $f(x) < g(x)$.
- (10 bodů) Nechť f je funkce, která je konvexní na \mathbb{R} . Ukažte, že f je buď nerostoucí, nebo splňuje $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (15 bodů) Uvažme funkci $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Najděte její limity v $\pm\infty$, najděte lokální a globální extrémy, určete obor hodnot, najděte maximální intervaly, na nichž je f monotónní, a maximální intervaly, na nichž je konvexní či konkávní. Načrtněte její graf.
- (10 bodů) Nechť je funkce f newtonovsky integrovatelná na intervalu (a, b) , pro nějaké $a < b$. Dokažte, že existuje $c \in (a, b)$, pro něž platí

$$f(c) = \frac{(N) \int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

Zdá-li se vám těžké dokázat tvzení v uvedené obecnosti, dokažte ho aspoň s nějakými dodatečnými předpoklady, například že f je spojitá nebo omezená. I za to dostanete nějaké body.

- (5 bodů) Zformulujte větu o substituci pro výpočet primitivní funkce. Tu větu nemusíte dokazovat. (Znáte-li více verzí této věty, zformulujte libovolnou z nich.)