

Řešení odevzdejte nejpozději do konce ledna.

Symbol $[n]$ označuje množinu $\{1, 2, \dots, n\}$. Při práci s mocninnými řadami můžete bez důkazu využívat vzorečky $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Příklad 1. *Uspořádaný množinový rozklad* množiny $[n]$ je posloupnost (B_1, B_2, \dots, B_k) neprázdných disjunktních množin takových, že $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = [n]$. Označme a_n počet všech uspořádaných množinových rozkladů množiny $[n]$. Například $a_2 = 3$, protože množina $1, 2$ má tyto tři uspořádané rozklady: $(\{1, 2\})$, $(\{1\}, \{2\})$ a $(\{2\}, \{1\})$. Najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro exponenciální vytvořující funkci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ [2 body].

Příklad 2. Necht g_n je počet 2-regulárních grafů (bez smyček a násobných hran) na množině vrcholů $[n]$. Máme tedy $g_0 = g_1 = g_2 = 0$, $g_3 = 1$, $g_4 = 3$ atd. Najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro exponenciální vytvořující funkci $\sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{x^n}{n!}$ [2 body].

Příklad 3. Necht $p_{n,k}$ je počet permutací množiny $[n]$ majících právě k pevných bodů. Najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro vytvořující funkci $P(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} \frac{x^n}{n!} y^k$ [2 body]. Určete průměrný počet pevných bodů v permutacích množiny $[n]$ [2 body].

Příklad 4. Mějme k dispozici b barev, pomocí nichž chceme obarvit stěny pravidelného čtyřstěnu v \mathbb{R}^3 . Dvě obarvení pokládáme za ekvivalentní, pokud lze jedno převést na druhé pomocí prostorové rotace. Kolik tříd má tato ekvivalence? [2 body]

Příklad 5. Pro $m \in \mathbb{N}_0$ označme a_m počet tříd izomorfismu všech multigrafů bez smyček majících čtyři vrcholy a m hran. Například $a_3 = 6$, jak ukazuje obrázek šesti multigrafů se třemi hranami uvedený níže. Najděte vzorec v uzavřeném tvaru pro mocninnou řadu $\sum_{m \geq 0} a_m x^m$. [3 body] (*Poznámka: není zde nutné hledat vzoreček pro samotné koeficienty a_m , stačí opravdu jen vzorec pro tu mocninnou řadu.*)

