

První série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II  
(verze pro páteční cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději na cvičení v pátek 1. listopadu.

*Izolovaný vrchol* v grafu je vrchol stupně 0.

**Příklad 1.** Najděte 5-regulární vrcholově 2-souvislý graf, který nemá perfektní párování [3 body].

**Příklad 2.** Necht  $T = (V, E)$  je strom. Dokažte, že  $T$  má perfektní párování právě tehdy, když pro každý vrchol  $v \in V$  má graf  $T - v$  právě jednu lichou komponentu. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body]

**Příklad 3.** Necht  $G = (V, E)$  je bipartitní graf. Dokažte, že  $G$  má perfektní párování, právě když pro každou množinu  $S \subseteq V$  platí, že v grafu  $G - S$  je nejvýš  $|S|$  izolovaných vrcholů. [1 implikace: 1 bod, obě implikace: 3 body]

**Příklad 4.** Necht  $n \geq 2$  je sudé číslo. Označme  $p_n$  počet perfektních párování v úplném grafu  $K_n$ . Ze cvičení už víme, že

$$p_n = (n-1)(n-3) \cdots 1.$$

Necht  $G$  je graf na  $n$  vrcholech mající  $\binom{n}{2} - k$  hran. Dokažte, že  $G$  má aspoň  $p_n - kp_{n-2}$  perfektních párování. Odvoďte z toho, že každý graf na  $n$  vrcholech s více než  $\binom{n-1}{2}$  hranami má perfektní párování. [4 body]