4 Funkce

Definice 4.1. Nechť f je reálná funkce definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{R}$. Řekneme, že f je na množině M

- *shora omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) < K$ pro každé $x \in M$,
- *zdola omezená*, pokud existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) > K$ pro každé $x \in M$,
- *omezená*, pokud je shora i zdola omezená,
- *rostoucí*, pokud $f(x) < f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *neklesající*, pokud $f(x) \leq f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *klesající*, pokud $f(x) > f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *nerostoucí*, pokud $f(x) \geq f(y)$ pro každé $x, y \in M$ splňující $x < y$,
- *monotónní*, pokud je neklesající nebo nerostoucí
- *periodická* s periodou $p \in (0, \infty)$, pokud pro každé $x \in M$ patří i $x + p$ a $x - p$ do M, a navíc $f(x - p) = f(x) = f(x + p)$,
- *prostá* pokud $x \neq y$ implikuje $f(x) \neq f(y)$ pro každé $x, y \in M$.

Narozdíl od posloupností mohou být monotónní funkce neomezené shora i zdola, příkladem je třeba $f(x) = x$.

Definice 4.2. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}$ je prostá funkce, nechť $H = \{f(x);\ x \in M\}$ je množina jejích hodnot. *Inverzní funkce k funkci* f je funkce $f^{<-1>}\colon H \to M$ splňující $f^{<-1>}(y) = x$ právě tehdy, když $f(x) = y$.

Příklad 4.3. Funkce $f(x) = x^2$ je prostá na intervalu $[0, \infty)$. Funkce inverzní k f na tomto intervalu je $\sqrt{x}$. Na intervalu $(-\infty, 0]$ je funkce $f(x) = x^2$ také prostá, její inverzní funkcí je ale $-\sqrt{x}$.

4.1 Elementární funkce

Definice 4.4 (Eulerovo číslo, exponenciální funkce)**.** *Exponenciální funkce*, značená exp, je pro $x \in \mathbb{R}$ definována jako součet řady

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots\ .$$

Eulerovo číslo e definujeme jako $exp(1)$, je tedy rovno $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Je to iracionální číslo, jeho číselná hodnota je asi $2,7$.

Poznamenejme bez důkazu, že řada v definici $\exp(x)$ je konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$, takže exponenciální funkce je všude definovaná.

Pozorování 4.5. *Zřejmě platí* $\exp(0) = 1$. *Dále je vidět, že pro* $x > 0$ *je* $\exp(x) > 1$ *a že* $\exp(x)$ *je pro* $x \geq 0$ *rostoucí funkce.*

Poznámka. Alternativně lze $\exp(x)$ definovat jako limitu $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Z časových důvodů nebudeme dokazovat ekvivalenci těchto definic.

Věta 4.6 (Vlastnosti $\exp(x)$)**.** *Exponenciální funkce má následující vlastnosti:*

1. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ *pro každé* $x, y \in \mathbb{R}$,
2. $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$,
3. $\exp(x)$ *je rostoucí funkce na* $\mathbb{R}$,
4. $\exp(x) > 0$ *pro každé* $x \in \mathbb{R}$,
5. $\exp(x) < 1$ *pro* $x < 0$,
6. $\lim_{n\to\infty}\exp(n) = +\infty$, *a*
7. $\lim_{n\to\infty}\exp(-n) = 0$.

Důkaz. První tvrzení nebudeme dokazovat formálně, poznamenejme pouze, že zmíněná rovnost odpovídá následujícím "intuitivním" manipulacím s řadami:

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{y^\ell}{\ell!}\right)\\
&\stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{x^k y^\ell}{k!\ell!}\\
&\stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^0y^n}{0!n!}+\frac{x^1y^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{x^2y^{n-2}}{2!(n-2)!}+\ldots+\frac{x^ny^0}{n!0!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}x^ny^0\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} \qquad \text{(užitím binomické věty)}\\
&= \exp(x+y).
\end{aligned}$$

Ovšem abychom získali formální důkaz, museli bychom zdůvodnit, že kroky označené otazníkem zachovávají součty levé a pravé strany, což není triviální (obecně, když změníme pořadí sčítanců v řadě, může se změnit i její součet). Formální důkaz zde dělat nebudeme.

Druhé tvrzení věty vyplývá z prvního užitím rovnosti $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$. Třetí tvrzení vyplývá z prvního, protože pro $x < y$ máme $\exp(y) = \exp(x+(y-x)) = \exp(x)\exp(y-x) > \exp(x)$, kde poslední nerovnost plyne z Pozorování 4.5.

Zbylá tvrzení věty přímočaře vyplývají z prvních tří a z Pozorování 4.5. □

Z Věty 4.6 plyne, že $\exp(x)$ je vždy kladné číslo. Poznamenejme bez důkazu, že pro každé $y > 0$ existuje právě jedno x takové, že $\exp(x) = y$. Díky tomu můžeme zavést následující definici.

Definice 4.7 (Logaritmus)**.** *Přirozený logaritmus* (nebo prostě jen logaritmus) je funkce $\ln\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, která je inverzní k funkci $\exp(x)$. Jinými slovy, pro dané $y > 0$ označujeme $\ln(y)$ (nebo $\ln y$) to číslo $x \in \mathbb{R}$, pro nějž platí $\exp(x) = y$.

Nyní můžeme definovat umocňování obecných reálných čísel.

Definice 4.8. Pro kladné reálné číslo b a reálné číslo x definujeme $b^x := exp(x \ln b)$. Pro kladné reálné číslo $b \neq 1$, definujeme *logaritmus o základu* b, píšeme $\log_b x$, jako inverzní funkci k b^x.

Všimněme si, že s takto definovaným umocňováním platí $e^x = \exp(x)$ a že tato definice umocňování je pro přirozený exponent $n \in \mathbb{N}$ shodná s obvyklou definicí umocňování pomocí násobení: například $x^2 = \exp(2\ln x) = \exp(\ln x + \ln x) = \exp(\ln x)\exp(\ln x) = x \cdot x$.

Logaritmus o dané bázi a lze z přirozeného logaritmu spočítat jako $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Definice 4.9 (Goniometrické funkce)**.** Funkce *sinus* a *cosinus* definujeme jako součet následujících řad

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

a

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

Funkce *tangens* a *cotangens* jsou definovány jako $\tan x$ (nebo $\operatorname{tg} x$) $= \frac{\sin x}{\cos x}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ a $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Definice 4.10 (Cyklometrické funkce)**.** Funkce *arkus sinus* $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je definována jako inverzní funkce k funkci sinus na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Funkce *arkus cosinus* $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ je definována jako inverzní funkce k funkci cosinus na intervalu $[0,\pi]$.

Funkce *arkus tangens* $\arctan : (-\infty,\infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$ je definována jako inverzní funkce k funkci tangens na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$.

Poznámka: grafy všech funkcí zmíněných v tomto textu si můžete prohlédnout např. na https://www.geogebra.org/graphing?lang=en.

Limity funkcí

Definice 4.11 (Okolí bodu)**.** Připomeňme, že *okolí se středem* $a \in \mathbb{R}$ *o poloměru* ε, nebo prostě ε*-okolí bodu* a, je interval $U(a,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Nyní zavedeme několik dalších druhů okolí.

Okolí nekonečen definujeme jako $U(+\infty, \varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty)$ a $U(-\infty, \varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon)$. *Pravé okolí,* resp. *levé okolí,* bodu $a \in \mathbb{R}$ je interval $U^+(a, \varepsilon) = [a, a+\varepsilon)$, resp. $U^-(a, \varepsilon) = (a-\varepsilon, a]$.

Prstencová okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ jsou obyčejná okolí s vyjmutým bodem a: $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \backslash \{a\}$, $P^+(a, \varepsilon) = U^+(a, \varepsilon) \backslash \{a\}$ a $P^-(a, \varepsilon) = U^-(a, \varepsilon) \backslash \{a\}$. Pro $a \in \{-\infty, +\infty\}$ definujeme $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon)$. Jednostranná okolí nekonečen zavádět nebudeme.

Definice 4.12 (Limita funkce)**.** Řekneme, že funkce f *má v bodě* $b \in \mathbb{R}^*$ *limitu* $L \in \mathbb{R}^*$, když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P(b, \delta) \colon f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Zapisujeme

$$\lim_{x \to b} f(x) = L.$$

Poznámka. Limita funkce f v bodě b nezávisí na její hodnotě v b, f ani nemusí být v b definovaná. Z definice limity ovšem plyne, že pokud má funkce limitu v bodě $b \in \mathbb{R}^*$, tak musí být definovaná na nějakém prstencovém okolí tohoto bodu.

Příklad 4.13. Pokud $f(x) = x$ a $b \in \mathbb{R}$, pak $\lim_{x \to b} f(x) = b$. Pokud změníme hodnotu funkce v nule a definujeme f jako

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \neq 0 \\ 1 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

pak stále $\lim_{x \to b} f(x) = b$ pro každé $b \in \mathbb{R}$, i pro $b = 0$.

Příklad 4.14. Funkce *signum* (znaménko) definovaná předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$$

má limitu $\lim_{x \to b} \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(b)$ pro $b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, a $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje.

Předchozí příklad ukazuje, že někdy je vhodné uvažovat levé a pravé prstencové okolí bodu zvlášť.

Definice 4.15 (Jednostranné limity)**.** Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě $b \in R$ *limitu zprava* rovnou $L \in \mathbb{R}^*$, zapisujeme

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = L,$$

pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P^+(b, \delta) \colon f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Analogicky definujeme *limitu zleva*, jen $P^+(b, \delta)$ se nahradí $P^-(b, \delta)$. To zapisujeme $\lim_{x \to b^-} f(x) = L$.

Podobně jako u posloupnosti, limita funkce, pokud existuje, je jednoznačně určena.

Věta 4.16 (Jednoznačnost limity funkce)**.** *Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. $L, L' \in \mathbb{R}^*$ buďte dvě různé limity funkce $f(x)$ v bodě $b \in \mathbb{R}^*$. Protože $L \neq L'$, lze zvolit tak malé $\varepsilon > 0$, že $U(L, \varepsilon) \cap U(L', \varepsilon) = \emptyset$. Mají existovat $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že pro $x \in P(b, \delta_1)$ platí $f(x) \in U(L, \varepsilon)$ a zároveň pro $x \in P(b, \delta_2)$ platí $f(x) \in U(L', \varepsilon)$. Pro $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ pak pro každé $x \in P(b, \delta)$ platí $f(x) \in U(L, \varepsilon) \cap U(L', \varepsilon)$. To je ale spor, protože $U(L, \varepsilon) \cap U(L', \varepsilon) = \emptyset$. $\square$

Existence limity úzce souvisí s existencí jednostranných limit. Jestliže funkce f má v bodě b limitu zleva i zprava rovnou L, pak $\lim_{x\to b} f(x) = L$. Naopak, pokud má f v bodě $b \in \mathbb{R}$ limitu L, pak má v tomto bodě i obě jednostranné limity a ty jsou rovné L.

Limitu funkce je možno definovat ekvivalentním způsobem pomocí limity posloupnosti.

Věta 4.17 (Heineho definice limity funkce)**.** *Nechť f je definovaná na prstencovém okolí $P(b, \Delta)$ bodu $b \in \mathbb{R}^*$ pro nějaké $\Delta > 0$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim_{x\to b} f(x) = L$;
2. *pro každou posloupnost* $(x_n) \subseteq P(b, \Delta)$, *pro níž platí* $\lim_{n\to\infty} x_n = b$, *platí také* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Zdůrazněme, že v části 2 předchozí věty se uvažují pouze posloupnosti (x_n) jejichž prvky jsou obsažené v prstencovém okolí bodu b, a tedy speciálně samotné číslo b se v těchto posloupnostech nemůže vyskytnout.

Pomocí Věty 4.17 můžeme snadno převést známé výsledky o aritmetice limit posloupností na analogické výsledky o limitách funkcí. Věta nám také dává návod jak ukázat, že funkce f nemá v bodě b limitu: stačí najít dvě posloupnosti (x_n) a (y_n) obsažené v prstencovém okolí b a mající limitu b tak, aby posloupnosti $(f(x_n))$ a $(f(y_n))$ neměly stejné limity. Konkrétní ukázkou takového argumentu je následující příklad.

Příklad 4.18. Pomocí Věty 4.17 ukážeme, že funkce $f(x) = \sin(1/x)$, která je definovaná na množině $M = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, nemá limitu v nule. Uvažme dvě posloupnosti (x_n) a (y_n), kde

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{a} \quad y_n = \frac{1}{(2n + 1/2)\pi}, n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě $\lim x_n = \lim y_n = 0$, ale $f(x_n) = \sin(1/x_n) = 0$ a $f(y_n) = \sin(1/y_n) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Proto $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ neexistuje.

Důkaz Věty 4.17 ukážeme na následující přednášce.