3 Posloupnosti - pokračování

Věta 3.1 (O limitě a uspořádání)**.** *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ *mají limity* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$*.*

(i) *Pokud* $A < B$*, tak existuje* n_0 *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n < b_n$*.*

(ii) *Pokud pro každé* n *platí* $a_n \leq b_n$*, pak* $A \leq B$*.*

Všimněte si, že v bodu (ii) nelze neostré nerovnosti nahradit ostrými, protože např. posloupnosti $(a_n) = (0, 0, 0, \dots)$ a $(b_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ splní $a_n < b_n$ pro každé n, ale přitom mají obě stejnou limitu 0.

Důkaz. Důkaz proveďme jen pro vlastní limity, pro ty nevlastní je argument ještě jednodušší.

(i) Pro libovolné ε splňující $0 < \varepsilon < (B - A)/2$ existuje n_0 takové, že pro $n > n_0$ platí $a_n < A + \varepsilon < (A + B)/2 < B - \varepsilon < b_n$, takže $a_n < b_n$.

(ii) Kdyby bylo $A > B$, pro velké n by podle (i) platilo $a_n > b_n$, což je ve sporu s předpokladem. (Zde vidíme, že předpoklad v bodu (ii) je zbytečně silný, stačilo by předpokládat, že nerovnost $a_n \leq b_n$ platí pro nekonečně mnoho hodnot n.) $\square$

Tvrzení 3.2. *Nechť* (a_n) *a* (b_n) *jsou posloupnosti takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_n \leq b_n$*. Potom platí následující vztahy:*

(i) *Pokud má* (a_n) *limitu* $+\infty$*, pak existuje i limita* b_n *a je rovna* $+\infty$*.*

(ii) *Pokud má* (b_n) *limitu* $-\infty$*, pak existuje i limita* a_n *a je rovna* $-\infty$*.*

Důkaz. Dokažme jen první tvrzení, to druhé je analogické. Protože $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, platí, že pro každé $K \in \mathbb{R}$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ máme $a_n > K$. Potom ale z nerovnosti $a_n \leq b_n$ plyne, že pro totéž n_0 platí, že pro všechna $n \geq n_0$ máme $b_n > K$, a tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. $\square$

Věta 3.3 (O dvou policajtech)**.** *Mějme posloupnosti* (a_n)*,* (b_n) *a* (c_n) *splňující* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *pro každé* n*. Předpokládejme, že* (a_n) *i* (c_n) *mají obě stejnou limitu* A*. Pak* (b_n) *má také limitu, a ta je rovna* A*.*

Důkaz. Všimněte si, že pro $A \in \{-\infty, +\infty\}$ plyne věta už z Tvrzení 3.2. Všimněte si také, že kdybychom věděli, že (b_n) má limitu, mohli bychom z Věty 3.1 ihned odvodit, že tato limita se rovná A.

Mějme nyní $A \in \mathbb{R}$. Protože (a_n) a (c_n) mají limitu A, tak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ platí $a_n \in U(A, \varepsilon)$ i $c_n \in U(A, \varepsilon)$. Protože $a_n \leq b_n \leq c_n$, platí pak pro tato n i $b_n \in U(A, \varepsilon)$ a tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = A$. $\square$

Definice 3.4 (Hromadný bod.)**.** Nechť (a_n) je posloupnost reálných čísel. Rozšířené reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}^*$ je jejím *hromadným bodem*, pokud je limitou nějaké podposloupnosti (a_n).

Věta 3.5. *Nechť (a_n) je posloupnost a nechť $H \subseteq \mathbb{R}^*$ je množina jejích hromadných bodů. Potom platí následující:*

1. *H je neprázdná.*
2. *H je jednoprvková, právě když (a_n) má (vlastní či nevlastní) limitu, a v tom případě platí $H = \{\lim_{n\to\infty} a_n\}$.*
3. *H má největší i nejmenší prvek v $\mathbb{R}^*$.*

Důkaz. Že H je neprázdná, plyne z toho, že každá posloupnost má monotónní podposloupnost, a že každá monotónní posloupnost má limitu, což jsme dokázali na předchozí přednášce.

Pokud má (a_n) limitu $L \in \mathbb{R}^*$, tak zjevně každá podposloupnost (a_n) má limitu L, a tedy $H = \{L\}$. Předpokládejme nyní, že naopak $H = \{L\}$, a dokažme, že L je limita (a_n). Pro jednoduchost uvažme pouze případ, kdy L je reálné. Pro spor předpokládejme, že L není limita (a_n). To tedy znamená, že exituje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé n_0 existuje $n \geq n_0$ takové, že $a_n \notin U(L, \varepsilon)$. Jinými slovy, (a_n) má podposloupnost (b_n), jejíž žádný prvek nepatří do $U(L, \varepsilon)$. Tato podposloupnost má dle první části věty nějaký hromadný bod $\beta \in \mathbb{R}^*$, který je tedy zároveň hromadným bodem (a_n), ale přitom $\beta \neq L$, což je spor s $H = \{L\}$.

Dokažme nyní, že H má největší prvek (pro nejmenší prvek je argument analogický). Nechť $S \in \mathbb{R}^*$ je supremum H. Ukážeme, že (a_n) má podposloupnost s limitou S, díky čemuž platí, že S patří do H, a tedy že S je největší prvek H. Opět se omezme na případ, kdy S je reálné, pro $S = +\infty$ je argument podobný. Naším cílem nyní bude zkonstruovat podposloupnost $b_1, b_2, b_3, \ldots$ posloupnosti (a_n) splňující $S - \frac{2}{k} < b_k < S + \frac{1}{k}$. Z věty o dvou policajtech pak vyplyne, že (b_n) má limitu S.

Abychom definovali prvek b_k, předpokládejme, že už jsme určili $b_1, \ldots, b_{k-1}$, a postupujme následovně: jelikož je S supremum H, obsahuje H prvek α větší než $S - \frac{1}{k}$ (jinak by $S - \frac{1}{k}$ byla horní mez H menší než S, což je spor s definicí suprema). Nechť (c_n) je podposloupnost (a_n) s limitou α. Dle definice limity pro $\varepsilon = \frac{1}{k}$ platí, že existuje n_0 takové, že pro $n \geq n_0$ platí $c_n \in U(\alpha, \varepsilon)$. Nyní definujeme b_k jako prvek (c_n) náležící do $U(\alpha, \varepsilon)$ a zároveň takový, že b_k se v posloupnosti (a_n) vyskytuje až po všech prvcích $b_1, \ldots, b_{k-1}$. Takové b_k lze jistě najít, protože (c_n) obsahuje nekonečně mnoho prvků z $U(\alpha, \varepsilon)$. Máme tedy hledaný prvek $b_k \in U(\alpha, \varepsilon) \subseteq (S - \frac{2}{k}, S + \frac{1}{k})$. □

Definice 3.6 (Limes superior a limes inferior.)**.** Pojmem *limes superior* posloupnosti (a_n) označujeme její největší hromadný bod. Značí se $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Nejmenší hromadný bod se pak nazývá *limes inferior* a značí $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Řady reálných čísel

V matematice občas vyvstane situace, kdy je potřeba sečíst nekonečně mnoho čísel. Při práci s nekonečnými součty ovšem musíme být opatrní: uvažme například nekonečný součet

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots .$$

Pokusíme-li se ho dvěma způsoby 'zjednodušit' uzávorkováním, dostaneme protiřečící výsledky:

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$
$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

Abychom předešli takovýmto komplikacím, musíme nekonečné součty zavést formálně.

Definice 3.7 (Řada a její součet)**.** *Nekonečná řada (reálných čísel)* je výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

kde $(a_n)_{n\geq 1}$ je posloupnost reálných čísel. Budeme se snažit přidržovat tohoto značení, ale pochopitelně se používá mnoho variant zápisů nekonečných řad, pro sčítací index se například může použít jiné písmeno, sčítá se od jiné hodnoty než od 1, apod.; zápisy pro nekonečné řady jsou tedy třeba také

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \cdots , \quad \sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots , \quad \sum_{k\geq 8} c_k = c_8 + c_9 + \cdots .$$

Částečný součet řady, přesněji její n-tý částečný součet s_n, je součet jejích prvních n členů. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je tedy $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ a pro řadu $\sum_{k\geq 8} c_k$ je $s_n = c_8 + c_9 + \cdots + c_{n+7}$. *Součet* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je definován jako limita posloupnosti (s_n). Pokud je tato limita vlastní, říkáme, že řada (a_n) je *konvergentní*, pokud $\lim s_n$ neexistuje nebo je nevlastní, je daná řada *divergentní*.

Příklad 3.8. Řada $\sum_{n\geq 0}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ je divergentní, protože $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.

Příklad 3.9. Důležitým příkladem řady je *geometrická řada*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots ,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr zvaný *kvocient*. Pro součet geometrické řady platí, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \dots \quad -1 < q < 1 \\ +\infty & \dots \quad q \geq 1 \\ \text{neexistuje} & \dots \quad q \leq -1. \end{cases}$$

Příklad 3.10. Dalším častým příkladem jsou řady tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots ,$$

kde $s \in \mathbb{R}$. Pro jejich konvergenci platí, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konverguje pro } s > 1 \\ \text{diverguje pro } s \leq 1. \end{cases}$$

Pro $s = 1$ se tato řada nazývá *harmonická řada*. Je to důležitý příklad řady, která diverguje, ačkoli její prvky konvergují k nule.