

#### Čtvrtá série domácích úkolů

- Řešení dodejte nejpozději v pondělí 22. dubna.
  - Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
  - Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.
  - Tvrzení dokázaná na přednášce nebo na cvičení, jakož i tvrzení známá z přednášek z minulého semestru, smíte ve svých řešeních využívat, aniž byste je dokazovali. Všechny ostatní argumenty musíte korektně zdůvodnit.
- 

- 4 1. Necht'  $G = (V, E)$  je hypergraf, pro nějž platí následující "Hallova podmínka s deficitem":

$$\forall F \subseteq E: \left| \bigcup_{e \in F} e \right| \geq |F| - 10.$$

Dokažte, že lze najít podmnožinu hyperhran  $E' \subseteq E$  splňující  $|E'| \geq |E| - 10$  tak, že hypergraf  $G' = (V, E')$  má systém různých reprezentantů.

- 4 2. Pojmem "latinský obdélník" tvaru  $m \times n$  označme matici s  $m$  řádky a  $n$  sloupci takovou, že v každém řádku se každé z čísel  $\{1, 2, \dots, n\}$  vyskytuje právě jednou a v každém sloupci se každé z těchto čísel vyskytuje nejvýš jednou. Dokažte, že pro libovolné  $1 \leq m < n$  lze k libovolnému latinskému obdélníku tvaru  $m \times n$  přidat jeden řádek tak, aby vznikl latinský obdélník tvaru  $(m + 1) \times n$ . (Nápověda: můžete například tuto úlohu přeformulovat jako hledání SRR ve vhodném hypergrafu a využít poznatky ze cvičení.)
- 2 3. Necht'  $G_{n,k}$  označuje hypergraf s množinou vrcholů  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , jehož hyperhrany jsou právě všechny  $k$ -prvkové podmnožiny  $V$ . Pro které hodnoty  $1 \leq k \leq n$  má  $G_{n,k}$  systém různých reprezentantů?