Třetí série domácích úkolů

- Řešení dodejte nejpozději v pondělí 8. dubna.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
- Tvrzení dokázaná na přednášce nebo na cvičení, jakož i tvrzení známá z přednášek z minulého semestru, smíte ve svých řešeních využívat, aniž byste je dokazovali. Všechny ostatní argumenty musíte korektně zdůvodnit.

$\boxed{4}$ 1. Definujme $a_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Najděte vzorec pro vytvořující funkci posloupnosti $a_0, a_1, \ldots$ a pomocí tohoto vzorce odvoďte vzorec v uzavřeném tvaru pro a_n.

2. Rozhodněte, zda jsou následující tvrzení pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad.

$\boxed{1}$ (a) Nechť S je toková síť a f tok v síti S. Potom v S existuje maximální tok g takový, že pro každou hranu e platí $f(e) \leq g(e)$.

$\boxed{1}$ (b) Nechť f je maximální tok v síti S a nechť R je minimální řez v S. Potom pro každou hranu $e \in R$ platí, že $f(e) = c(e)$, kde $c(e)$ označuje kapacitu e.

$\boxed{1}$ (c) Nechť R je minimální řez v síti $S = (G, z, s, c)$. Předpokládejme, že kapacity všech hran S jsou nenulové. Potom každá orientovaná cesta ze z do s v grafu G obsahuje právě jednu hranu z řezu R.

$\boxed{3}$ 3. Na následujícím obrázku je toková síť, v níž z je zdroj, s je stok a čísla u hran označují kapacity. Najděte maximální tok a minimální řez v této síti. Naznačte, jak jste k výsledku došli.