První série domácích úkolů z DM

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo přineste na cvičení 10. října. Řešení dodejte nejpozději v úterý 16. října.

Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Symbol $\mathcal{P}(X)$ označuje potenční množinu množiny X, symbol $\mathbb{N}$ označuje množinu $\{0, 1, 2, \dots\}$ přirozených čísel, symbol $\mathbb{R}$ množinu reálných čísel, symbol $\mathbb{Z}^+$ množinu kladných celých čísel.

Příklad 1. Pro kladné celé číslo $a \in \mathbb{Z}^+$ označme V_a množinu všech celých čísel větších než a, tj.

$$V_a = \{b \in \mathbb{N};\ b > a\} = \{a+1, a+2, a+3, \dots\}.$$

Jaké prvky obsahují následující množiny? [2 body za každou množinu]

- $M_1 = \bigcap_{a \in \mathbb{N}} V_a$
- $M_2 = \bigcup_{a \in \mathbb{N}} (V_a \setminus V_{a+1})$

Příklad 2. Nechť X je konečná množina s m prvky a nechť Y je konečná množina s n prvky. Nechť $X \times Y$ označuje kartézský součin X a Y. Kolik prvků má množina $A = \mathcal{P}(X \times Y)$? Kolik prvků má množina $B = \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$? Platí mezi A a B nějaká inkluze nebo dokonce rovnost? [6 bodů]

Příklad 3. Je množina $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\{0, 1, 2, \dots, n\})$ totožná s množinou $\mathcal{P}(\mathbb{N})$? Pokud ne, je aspoň jedna z těchto množin podmnožinou té druhé? [5 bodů]