První test z kombinatoriky a grafů

- Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat.
- Tvrzení dokázaná na přednášce nebo na cvičení, jakož i tvrzení známá z přednášek z minulého semestru, smíte ve svých řešeních využívat, aniž byste je dokazovali. Všechny ostatní argumenty musíte korektně zdůvodnit.

---

15 1. Následující funkce uspořádejte toho, jak rychle rostou (řekneme, že funkce $f(n)$ 'roste rychleji' než funkce $g(n)$, pokud pro každé dost velké n platí $f(n) > g(n)$).

- $f_1(n) = (3n^2)!$
- $f_2(n) = \binom{10n}{5n}$
- $f_3(n) = 5^{\binom{n}{2}}$
- $f_4(n)$ je počet hypergrafů na množině vrcholů $\{1, 2, \dots, n\}$, jejchž každá hyperhrana obsahuje nejvýše čtyři vrcholy.

15 2. Připomeňme, že Fibonacciho čísla $F_0, F_1, F_2, \dots$ jsou definována pomocí soustavy rekurencí

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{pro } n \geq 2. \end{aligned}$$

Definujme nyní posloupnost $a_0, a_1, a_2, \dots$ předpisem $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k F_k$. Najděte vzorec pro vytvořující funkci této posloupnosti. Výsledek by měl být vzorec v uzavřeném tvaru, ale na konkrétní podobě vzorce nezáleží, tj. nemusíte ztrácet čas převáděním zlomků na společné jmenovatele, roznásobováním součinů a podobnými estetickými úpravami.

10 3. Nechť b_n označuje počet způsobů, jak zapsat číslo n jako součet libovolného počtu lichých přirozených čísel. Součty pokládáme za různé, i když se liší jen pořadím sčítanců. Například $b_5 = 5$, protože číslo 5 můžeme získat pěti způsoby jako součet lichých sčítanců: 5=5, 5=3+1+1, 5=1+3+1, 5=1+1+3 a 5=1+1+1+1+1. Číslo b_0 definujme jako 0. Najděte vytvořující funkci posloupnosti b_n. Výsledek by měl být vzorec v uzavřeném tvaru, tedy bez nekonečných sum a podobných výrazů. Opět můžete přeskočit estetické úpravy.

10 4. Nechť (B, P) je konečná projektivní rovina. Dokažte, že hypergraf (B, P) má systém různých reprezentantů.