Řešení příkladů na procvičení před druhým testem z matematických dovedností

1. Neexistuje žádné racionální číslo x takové, že $x^3 = 4$.

   Důkaz. Pro spor předpokládejme, že takové racionální číslo x existuje. Potom tedy x lze zapsat jako podíl $\frac{p}{q}$ dvou nesoudělných celých čísel. Dosazením do rovnice dostaneme $p^3 = 4q^3$. Tudíž p^3 je násobek 4, z čehož plyne, že p je sudé, tedy $p = 2k$ pro nějaké celé číslo k. Dosazením do rovnice $p^3 = 4q^3$ dostaneme $2k^3 = q^3$, tedy i q je sudé, což je spor s tím, že p a q jsou nesoudělná. □

2. Pro každé přirozené číslo m platí, že m je sudé právě tehdy, když $2^m - 1$ je násobek tří.

   Důkaz. Označme symbolem $T(m)$ tvrzení "m je sudé právě tehdy, když $2^m - 1$ je násobek tří". Dokažme indukcí podle m, že pro libovolné m je $T(m)$ pravdivé.
   Pro $m = 1$ máme $2^1 - 1 = 1$, tedy ekvivalence platí. Pro $m = 2$ máme $2^2 - 1 = 3$ a ekvivalence znovu platí. Tedy $T(1)$ i $T(2)$ jsou pravdivé.
   Nyní mějme libovolné $m \geq 3$. Dokážeme, že pokud platí $T(m-2)$ i $T(m-1)$, tak platí i $T(m)$. Postupně dokážeme obě implikace z tvrzení $T(m)$.
   Důkaz "$\Rightarrow$": Provedeme přímý důkaz. Předpokládejme, že m je sudé a dokažme, že $2^m - 1$ je násobek tří. Protože m je sudé, tak i $m - 2$ je sudé, a dle indukčního předpokladu platí, že $2^{m-2} - 1$ je násobek tří, tedy $2^{m-2} - 1 = 3k$ pro nějaké celočíselné k. Pak ale platí

   $$\begin{aligned} 2^m - 1 &= (4 \cdot 2^{m-2}) - 1 \\ &= (4 \cdot (3k + 1)) - 1 \\ &= 12k + 3, \end{aligned}$$

   což je násobek tří, jak jsme chtěli dokázat.
   Důkaz "$\Leftarrow$": Dokážeme obměnu této implikace, tj. pokud m je liché, pak $2^m - 1$ není násobek tří. Předpokládejme, že m je liché. Potom $m - 1$ je sudé, a dle indukčního předpokladu $2^{m-1} - 1 = 3\ell$, pro nějaké celé číslo ℓ. Máme tedy

   $$\begin{aligned} 2^m - 1 &= (2 \cdot 2^{m-1}) - 1 \\ &= (2 \cdot (3\ell + 1)) - 1 \\ &= 6\ell + 1, \end{aligned}$$

   což je o 1 větší než násobek tří, tedy $2^m - 1$ není násobek tří. □

3. Pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ platí $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$.

   Důkaz. Postupujme indukcí. Pro $n = 1$ je levá i pravá strana rovnosti nulová.
   Nechť $n \geq 2$ je libovolné. Předpokládejme, že platí $\sum_{k=1}^{n-1} k(k-1) = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$, a chtějme dokázat, že $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1)$. Ověřme rovnost tím, že upravíme její levou stranu:

   $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k(k-1) &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)\right) + n(n-1) && \text{(oddělili jsme poslední člen sumy)} \\ &= \frac{1}{3}n(n-1)(n-2) + n(n-1) && \text{(dosadili jsme z indukčního předpokladu)} \\ &= n(n-1)\left(\frac{1}{3}(n-2) + 1\right) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)n(n-1), \end{aligned}$$

   a důkaz je hotov. □

4. Symbolem F_n označme n-té Fibonacciho číslo (připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou definována pomocí vztahů $F_0 = 0, F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že čísla F_{n-1} a F_n jsou navzájem nesoudělná (tj. nemají žádného společného celočíselného dělitele většího než 1).

   Důkaz. Označme $T(n)$ tvrzení, že čísla F_{n-1} a F_n jsou nesoudělná, a dokažme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $T(n)$ pravdivé. Důkaz je možno dělat indukcí, ale pro zpestření ho zformulujme jako důkaz sporem. Předpokládejme pro spor, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $T(n)$ neplatí. Zvolme za n nejmenší hodnotu, pro níž je $T(n)$ nepravdivé. Podotkněme, že $n > 1$, neboť čísla $F_0 = 0$ a $F_1 = 1$ nemají žádného společného dělitele většího než 1, takže $T(1)$ je pravdivé.
   Mějme tedy výše zvolené $n > 1$, a nechť $d \in \mathbb{N}$ je největší společný dělitel F_{n-1} a F_n. Protože $T(n)$ je nepravdivé, víme, že $d > 1$. Protože d dělí F_{n-1} i F_n, tak d dělí i rozdíl těchto čísel, tedy $F_n - F_{n-1}$. Protože $n > 1$, tak víme, že $F_n - F_{n-1}$ je rovno F_{n-2}. Zjistili jsme, že F_{n-1} i F_{n-2} jsou dělitelná číslem $d > 1$, tedy $T(n-1)$ neplatí, což je spor s tím, že n bylo nejmenší číslo, pro něž je $T(n)$ nepravdivé. □

5. Symbolem F_n označme opět n-té Fibonacciho číslo. Potom pro každé přirozené číslo $n \geq 1$ existuje přesně F_{n+2} způsobů, jak vytvořit posloupnost nul a jedniček délky n tak, aby žádné dvě jedničky nebyly na sousedních pozicích. (Příklad: pro $n = 3$ máme posloupnosti 000, 001, 010, 100 a 101.)

   Důkaz. Označme p_n počet binárních posloupností délky n bez dvou sousedních jedniček a dokazujme indukcí, že pro každé $n \geq 1$ platí, že $p_n = F_{n+2}$.
   Zkontrolujme, že $p_1 = 2 = F_3$ a $p_2 = 3 = F_4$. Nyní mějme libovolné $n \geq 3$. Předpokládejme, že pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ platí, že $p_j = F_{j+2}$, a chtějme dokázat, že $p_n = F_{n+2}$.
   Postupujme takto: všechny binární posloupnosti délky n bez dvou sousedních jedniček si rozdělme do dvou skupin: v první skupině budou posloupnosti končící nulou, ve druhé ty, které končí jedničkou. V první skupině pak bude přesně p_{n-1} posloupností, protože posloupnosti z první skupiny vzniknou právě tak, že k libovolné posloupnosti délky $n-1$ bez dvou sousedních jedniček přidám na konec nulu.
   Abychom spočítali posloupnosti druhé skupiny, všimněme si nejdřív, že každá posloupnost z této skupiny má na předposledním místě nulu, jinak by měla dvě sousedící jedničky. Odtud nahlédneme, že posloupnosti druhé skupiny vzniknou právě tak, že k libovolné posloupnosti délky $n-2$ bez dvou sousedních jedniček přidám na konec nulu a jedničku. Celkem je tedy ve druhé skupině p_{n-2} posloupností.
   Celkem tedy $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$, což dle indukčního předpokladu dává $p_n = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. □

6. Nechť S je ternární strom, tj. zakořeněný strom, jehož každý vnitřní vrchol má právě tři potomky. Předpokládejme, že každý vnitřní vrchol stromu S má mezi svými třemi potomky aspoň jeden list. Označme d hloubku stromu S, tedy počet hran na nejdelší cestě z kořene do některého listu. Potom S má nejvýše $2^{d+1} - 1$ listů.

   Důkaz. Postupujme indukcí podle hloubky stromu S. Označme tedy $T(d)$ tvrzení, které říká "pro libovolný ternární strom S hloubky d, jehož každý vnitřní vrchol má mezi potomky aspoň jeden list, platí, že S má nejvýše $2^{d+1} - 1$ listů". Chceme dokázat, že pro každé d je $T(d)$ pravdivé. Označme symbolem $\ell(S)$ počet listů stromu S.
   Zkontrolujme, že platí $T(0)$: ternární strom hloubky 0 je buď prázdný strom nebo strom s jediným vrcholem, každopádně má nejvýš jeden list, přičemž $2^{0+1} - 1 = 1$.
   Mějme nyní libovolné $d \geq 1$. Předpokládejme, že pro každé $d' < d$ je trvzení $T(d')$ pravdivé, a chtějme dokázat $T(d)$. Abychom dokázali $T(d)$, zvolme libovolný ternární strom S hloubky d, jehož každy vnitřní vrchol má mezi potomky aspoň jeden list. Protože S má hloubku $d \geq 1$, tak kořen S není list, kořen má tedy tři potomky, které označme x, y, z. Aspoň jeden z nich, nechť je to třeba x, je listem. Označme S_y podstrom S zakořeněný ve vrcholu y, tj. S_y je podstrom S tvořený všemi vrcholy w takovými, že cesta z kořene S do vrcholu w obsahuje vrchol y. Obdobně označme S_z podstrom S zakořeněný v z. Všimněme si, že S_y nebo S_z může být tvořen i jen jediným vrcholem. Každopádně označíme-li d_y hloubku stromu S_y a d_z hloubku S_z, tak vidíme, že d_y i d_z je nejvýše $d - 1$. Zároveň platí, že každý list S kromě x je listem S_y nebo listem S_z, tedy

$$\begin{aligned}
\ell(S) &= 1 + \ell(S_y) + \ell(S_z) \\
&\leq 1 + (2^{d_y+1} - 1) + (2^{d_z+1} - 1) && \text{dle indukčního předpokladu} \\
&\leq 1 + (2^d - 1) + (2^d - 1) && \text{protože } d_y \leq d-1 \text{ a } d_z \leq d-1 \\
&\leq 2^{d+1} - 1,
\end{aligned}$$

   což jsme chěli dokázat. □

7. V libovolném grafu $G = (V, E)$ lze obarvit vrcholy dvěma barvami tak, že alespoň $|E|/2$ hran bude obsahovat vrcholy obou barev.

   Důkaz. Postupujme indukcí podle $|V|$. Pro graf s jedním vrcholem (i pro graf s 0 vrcholy) dokazované tvrzení platí, protože takový graf má celkem 0 hran, a při libovolném obarvení vrcholů bude 0 dvoubarevných hran, přičemž $0 \geq 0/2$, takže požadovaná nerovnost je splněna.
   Nechť $n \geq 2$ je libovolné. Předpokládejme, že pro každy graf s méně než n vrcholy umíme najít obarvení vrcholů splňující požadavky tvrzení. Chceme dokázat, že takové obarvení umíme najít i pro libovolný graf s n vrcholy.
   Nechť je tedy $G = (V, E)$ libovolný graf s n vrcholy. Nechť x je libovolný vrchol grafu G, a nechť d je stupeň (tj. počet sousedů) vrcholu x v grafu G. Označme $G' = (V', E')$ graf, který vznikne tak, že z G odstraníme vrchol x a všachny hrany, které jsou s ním incidentní. Platí tedy $|V'| = |V| - 1$ a $|E'| = |E| - d$. Dle indukčního předpokladu lze vrcholy G' obarvit dvěma barvami tak, že G' bude obsahovat aspoň $|E'|/2$ dvoubarevných hran. Zbývá ještě obarvit vrchol x. Pro něj vybereme tu barvu, která se na sousedech x vyskytuje méně často (jsou-li obě barvy na sousedech x použité stejně často, obarvíme x libovolně). Tím je zaručeno, že alespoň $d/2$ hran incidentních s x v grafu G bude dvoubarevných. Celkový počet dvoubarevných hran bude tedy aspoň

$$\frac{|E'|}{2} + \frac{d}{2} = \frac{|E| - d}{2} + \frac{d}{2} = \frac{|E|}{2}.$$ □