Druhá série domácích úkolů

- Řešení dodejte nejpozději v úterý 27. března.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.
- Tvrzení dokázaná na přednášce nebo na cvičení, jakož i tvrzení známá z přednášek z minulého semestru, smíte ve svých řešeních využívat, aniž byste je dokazovali. Všechny ostatní argumenty musíte korektně zdůvodnit.

---

1. Pro následující posloupnosti najděte vzorec pro vytvořující funkci a vzorec pro n-tý člen příslušné posloupnosti. Vyjádřete výsledky v uzavřeném tvaru, tedy bez použití sum.

$\boxed{2}$ (a) posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ splňující rovnosti

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= n + c\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) \quad \text{pro každé } n \geq 1, \end{aligned}$$

kde c je nějaká nenulová reálná konstanta

$\boxed{2}$ (b) posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_n = \sum_{k=0}^{n} k3^k$

$\boxed{2}$ (c) posloupnost $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, pro niž platí

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_n &= \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2} \quad \text{pro každé } n \geq 2 \\ \lim_{n\to\infty} c_n &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 2. Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost s vytvořující funkcí $f(x)$, a nechť $d \geq 0$ je celé číslo. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

- Existuje polynom $p(n)$ stupně nejvýše d takový, že pro každé $n \geq 0$ platí $p(n) = a_n$.
- Funkce $f(x)$ má tvar
$$f(x) = \frac{q(x)}{(1-x)^{d+1}},$$
kde $q(x)$ je nějaký polynom stupně nejvýše d.

Za každou dokázanou implikaci v tomto příkladu můžete získat dva body. Neumíte-li dokázat toto tvrzení v obecnosti, dokažte ho aspoň pro nějakou konkrétní hodnotu d.