

Příklady ze cvičení z KGI

středa 9. 5.

1. Najděte nekonečný graf, který pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje kliku velikosti k , ale neobsahuje nekonečnou kliku.
2. Najděte posloupnost čísel, která pro každé $k \in \mathbb{N}$ obsahuje rostoucí podposloupnost délky k , ale neobsahuje nekonečnou rostoucí podposloupnost.
3. Uvažme tabulku s N řádky a N sloupci, jejíž políčka jsou obarvena b barvami. ‘Jednobarevná podtabulka’ je potom nějaká množina (ne nutně sousedních) řádků a sloupců na jejichž průsečících se vyskytují jen políčka jedné barvy. Dokažte následující tvrzení a snažte se získat co nejlepší horní odhad pro N v závislosti na b .
 - (a) Pro každé b existuje N takové, že každé b -obarvení tabulky $N \times N$ obsahuje jednobarevnou podtabulku tvaru 2×2 .
 - (b) Pro každé b existuje N takové, že každé b -obarvení tabulky $N \times N$ obsahuje jednobarevnou podtabulku tvaru 10×10 .
 - (c) Mějme nyní tabulku s nekonečně mnoha řádky a sloupci. Dokažte, že každé b -obarvení této tabulky obsahuje, pro každé $k \in \mathbb{N}$, jednobarevnou podtabulku tvaru $k \times \infty$.
 - (d) Najděte 2-obarvení nekonečné tabulky tvaru $\infty \times \infty$, které neobsahuje jednobarevnou podtabulku tvaru $\infty \times \infty$.
4. Mějme spočetný nekonečný hypergraf $H = (\mathbb{N}, E)$ takový, že pro každou konečnou podmnožinu $F \subseteq E$ má (\mathbb{N}, F) systém různých reprezentantů. Předpokládejme dále, že každá hyperhrana $e \in E$ je konečná.
 - (a) Dokažte, že H má SRR.
 - (b) Ukažte na příkladu, že když se vynechá předpoklad, že každá hyperhrana je konečná, tak předchozí tvrzení obecně neplatí.