Příklady ze cvičení z KGI
středa 28. 2.

Symbol $[n]$ označuje množinu čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Předpokládejme, že $a_0, a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost čísel s vytvořující funkcí $f(x)$. Pomocí funkce $f(x)$ vyjádřete vytvořující funkce následujících posloupností:

$$a_0 + 1, a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots$$
$$0, a_0, a_1, a_2, \ldots$$
$$a_0, -a_1, a_2, -a_3, \ldots, (-1)^n a_n, \ldots$$
$$a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, 0, \ldots$$
$$a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \ldots$$
$$a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \ldots$$
$$a_0, a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1}, \ldots$$
$$0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, na_n, \ldots$$

2. Které posloupnosti mají následující vytvořující funkce:

   - $\frac{2}{3+4x}$
   - $\frac{1}{1-x^5}$
   - $\frac{1}{(1-x)^2}$

3. Definujme čísla a_n, b_n a c_n takto:

   - a_n je počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet tří nezáporných celých čísel
   - b_n je počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet tří kladných celých čísel
   - c_n je počet způsobů, jak lze číslo n zapsat jako součet libovolného počtu kladných celých čísel

   Vždy platí, že dva součty pokládáme za různé, i když se liší jen pořadím sčítanců. Najděte vzorce pro vytvořující funkce posloupností $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=0}^{\infty}$. Najděte i vzorce pro samotná čísla a_n, b_n a c_n.