Devátá série domácích úkolů z Lineární algebry II
(verze pro cvičení v pondělí od 14:00)

Vyřešené příklady posílejte mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz. Řešení pošlete nejpozději v neděli 14. května.

Své výsledky nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Příklad 1. Mějme Markovův řetězec s n stavy $s_1, \ldots, s_n$. Pravděpodobnosti přechodů mezi stavy jsou následující: ze stavu s_n s pravděpodobností 1 přejdeme do stavu s_1 a pro jakýkoliv jiný stav $s_i \in \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$ platí, že z něj s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ přejdeme do stavu s_{i+1} a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ přejdeme do stavu s_1. Najděte stacionární rozdělení tohoto Markovova řetězce. [2 body] (Zdá-li se vám to těžké, vyřešte aspoň speciální případ $n = 4$, za to dostanete 1 bod.)

Příklad 2. Řekneme, že Markovův řetězec je *symetrický*, pokud pro každé dva jeho stavy s_i a s_j platí, že pravděpodobnost přechodu z s_i do s_j je stejná jako pravděpodobnost přechodu z s_j do s_i. Označme x_n vektor $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})^T \in \mathbb{R}^n$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. [1 bod za každé tvrzení]

a) Každý symetrický Markovův řetězec s n stavy má stacionární rozdělení x_n.
b) Každý Markovův řetězec s n stavy a se stacionárním rozdělením x_n je symetrický.

Příklad 3. Dokažte, že pokud má Markovův řetězec alespoň dvě různá stacionární rozdělení, pak má nekonečně mnoho různých stacionárních rozdělení. [1 bod]

Příklad 4. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je nezáporná matice. Jak víme z Perronovy věty, A má nezáporné vlastní číslo $\lambda_{\max}$ takové, že každé vlastní číslo λ matice A splňuje $|\lambda| \leq \lambda_{\max}$. Dokažte (s využitím Perronovy věty), že pokud existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že matice A^k má všechny složky nenulové, tak potom $\lambda_{\max}$ má násobnost 1 a všechna ostatní vlastní čísla λ matice A splní $|\lambda| < \lambda_{\max}$.