

Čtvrtá série domácích úkolů z Lineární algebry II
(verze pro cvičení v pondělí od 14:00)

Vyřešené příklady pošlete mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz. Řešení pošlete nejpozději v neděli 19. března.

Své výsledky nezapomeňte zdůvodnit. Smíte bez důkazu využívat kterékoliv tvrzení dokázané na přednášce nebo na cvičení, ale nezapomeňte říci, které tvrzení využíváte.

Při vymýšlení správného postupu smíte navzájem spolupracovat, ale své finální řešení musíte sepsat samostatně.

Příklad 1. Necht V je k -dimenzionální vektorový podprostor prostoru \mathbb{R}^n a necht V^\perp je jeho ortogonální doplněk. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá. Pravdivá tvrzení dokažte, pro nepravdivá najděte protipříklad. [1 bod za každé tvrzení]

- Jestliže $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ je báze prostoru V a $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je báze prostoru V^\perp , potom $\{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je báze \mathbb{R}^n .
- Jestliže $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ je ortonormální báze prostoru V a $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je ortonormální báze prostoru V^\perp , potom $\{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je ortonormální báze \mathbb{R}^n .
- Jestliže $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ je báze prostoru V a $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je množina vektorů taková, že $\{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je báze \mathbb{R}^n , potom $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je báze V^\perp .
- Jestliže $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ je ortonormální báze prostoru V a $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je množina vektorů taková, že $\{v_1, v_2, \dots, v_k, w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je ortonormální báze \mathbb{R}^n , potom $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ je ortonormální báze V^\perp .

Příklad 2. Necht x, a, b, c, d jsou reálná čísla. Určete determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} x+a & x & x & x \\ x & x+b & x & x \\ x & x & x+c & x \\ x & x & x & x+d \end{pmatrix}. \quad [2 \text{ body}]$$