Domácí úkoly z diskrétní matematiky
2. série

- Řešení domácích úkolů můžete odevzdat buď mailem na adrese jelinek@iuuk.mff.cuni.cz, nebo na papíře na cvičení.
- Své odpovědi nezapomeňte zdůvodnit.
- Řešení odevzdejte nejpozději ve středu 9. listopadu.

Příklad 1. O každé z následujících relací rozhodněte, zda je to ekvivalence. Pokud se jedná o ekvivalenci, popište její třídy.

a) Relace $\sim$ je relace na množině všech funkcí z reálných čísel do reálných čísel, kde $f \sim g$ právě když existuje $x \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x)$. [1 bod]

b) Relace $\sim$ je relace na množině přirozených čísel, kde $a \sim b$ právě když $a + 2b$ je násobek tří. [2 body]

Příklad 2. Nechť R je symetrická a tranzitivní relace. Plyne z toho, že R je také reflexivní? [1 bod]

Příklad 3. Dokažte následující tvrzení:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{2}\binom{n}{k} = \binom{n}{2}2^{n-2}$, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. [1 bod]

b) $\sum_{k=0}^{a} \binom{b}{k}\binom{c}{a-k} = \binom{b+c}{a}$, pro libovolná $a, b, c \in \mathbb{N}$ splňující $a \leq b$ a $a \leq c$. [1 bod]

c) $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$ splňující $m \leq n$. [2 body]

d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. [2 body]