Třetí série domácích úkolů z Kombinatoriky a grafů II
(verze pro středeční cvičení)

Vyřešené příklady odevzdávejte buď mailem na adresu jelinek@iuuk.mff.cuni.cz nebo na papíře na některém cvičení. Řešení odevzdejte nejpozději v úterý 15. prosince.

Vrcholovou barevnost grafu G značím $\chi(G)$, hranovou barevnost značím $\chi_e(G)$, klikovost značím $\omega(G)$, nezávislost značím $\alpha(G)$, maximální stupeň značím $\Delta(G)$, minimální stupeň značím $\delta(G)$, doplněk G značím $\overline{G}$.

Příklad 1. Nechť G je 3-regulární vrcholově 2-souvislý rovinný graf s pevně daným rovinným nakreslením. Z věty o čtyřech barvách víme, že stěny G lze obarvit čtyřmi barvami tak, že každé dvě sousední stěny mají různé barvy. Ukažte, že G má hranovou barevnost 3 [2 body].

Příklad 2. Nechť G je bipartitní graf. Dokažte, že $\chi_e(G) = \Delta(G)$. Zdá-li se vám to těžké, dokažte toto tvrzení aspoň pro speciální případ, kdy všechny vrcholy G mají stupeň $\Delta(G)$ [3 body za obecné řešení, 2 body za řešení pro regulární grafy].

Příklad 3. Nechť G je chordální graf, a nechť posloupnost $v_1, v_2, \ldots, v_n$ je jeho perfektní eliminační schéma. Pro každou z následujících úloh popište polynomiální algoritmus, který ji vyřeší. Smíte předpokládat, že součástí vstupu pro váš algoritmus je i PES grafu G.

a) Určete $\omega(G)$ a najděte v G kliku velikosti $\omega(G)$ [1 bod].
b) Určete $\alpha(G)$ a najděte v G nezávislou množinu velikosti $\alpha(G)$ [2 body].
c) Určete $\chi(\overline{G})$ a najděte obarvení $\overline{G}$ pomocí $\chi(\overline{G})$ barev [2 body].

Nezapomeňte zdůvodnit, že vaše algoritmy opravdu řeší zadanou úlohu.

Příklad 4. Jaké největší hodnoty může nabývat $\delta(G)$ pro nehamiltonovský graf G na n vrcholech, kde $n \geq 3$ je liché? Najděte přesnou hodnotu [1 bod]. *Poznámka: případ, kdy n je sudé, jsme už vyřešili na cvičení.*

Příklad 5. Nechť $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ je nějaká permutace čísel $1, 2, \ldots, n$, tj. nějaká posloupnost, v níž se každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ vyskytuje právě jednou. Nechť K je délka nejdelší klesající podposloupnosti v p. Dokažte, že p lze pokrýt pomocí K rostoucích podposloupností (jinými slovy, v p lze najít K rostoucích podposloupností takových, že každý prvek p patří do některé z nich) [2 body].