Dvanáctá série domácích úkolů
verze pro cvičení v pátek od 10:40

- Řešení dodejte nejpozději ve čtvrtek 26. května.
- Přejete-li si mít své bodové zisky zveřejněny na webu cvičení, dejte mi vědět. Můžete si případně zvolit přezdívku.
- Číslo v rámečku u zadání označuje bodové ohodnocení příkladu.

---

1. Nechť $G = (V, H)$ je hypergraf s nekonečně (spočetně) mnoha vrcholy a hyperhranami.

   $\boxed{1}$ (a) Dokažte, že v G lze najít nekonečnou množinu hyperhran $H' \subseteq H$ takovou, že buď každé dvě hyperhrany z H' jsou disjunktní, nebo každé dvě hyperhrany z H' mají aspoň jeden společný vrchol.

   $\boxed{2}$ (b) Dokažte, že pokud jsou všechny hyperhrany G konečné, tak buďto v G existuje nekonečná množina hyperhran $H' \subseteq H$ taková, že každé dvě hyperhrany z H jsou disjunktní, nebo v G existuje vrchol, který je obsažen v nekonečně mnoha hyperhranách.

   $\boxed{2}$ (c) Ukažte na příkladu, že kdybychom z předchozího tvrzení odstranili předpoklad, že všechny hyperhrany G jsou konečné, vzniklo by nepravdivé tvrzení.

$\boxed{1+2}$ 2. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že každá N-prvková posloupnost reálných čísel obsahuje podposloupnost délky k, která je buď rostoucí, klesající nebo konstantní. Za to získáte 1 bod. Pokud navíc dokážete, že toto tvrzení platí pro $N = k^{1000}$, získáte další dva body.